БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. А. Расолько

Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов

Минск
БГУ
2015

УДК 517.968+519.642

Рекомендовано советом
механико-математического факультета
10 февраля 2015 г., протокол № 5

Рецензенты:
доктор физико-математических наук *В. Б. Таранчук*;
доктор физико-математических наук *В. М. Волков*

Расолько, Г. А.
Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов [Электронный ресурс] / Г. А. Расолько. – Минск : БГУ, 2015.
ISBN 978-985-566-168-0.

Рассматриваются алгоритмы численного решения скалярных и векторных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши с произвольными и постоянными коэффициентами, основанные на полученных в монографии спектральных соотношениях для характеристических операторов.

УДК 517.968+519.642

ISBN 978-985-566-168-0

Оглавление

Предисловие

Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется при исследовании большого класса граничных задач теории упругости, аэродинамики, электродинамических структур, дифракции и в других вопросах естествознания (см., например, [1], [2], [18], [24], [25], [27] – [29], [32], [53] и др.).

Теория сингулярных интегральных уравнений построена в 40—50-х гг. двадцатого столетия и изложена в [26], [17], [12].

Начиная с 30-х гг. прошлого столетия, когда еще не было полной ясности в теории сингулярных интегральных уравнений, усилия ряда математиков и механиков (М. А. Лаврентьева, М. В. Келдыша, Г. Мультхоппа и др.) были направлены на разработку приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений.

К тому времени наибольшее развитие получили численные методы для интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для таких уравнений были построены: численные методы высокой точности, применимые к достаточно узким классам уравнений, когда искомое решение интерполируется специальными многочленами или частичными суммами рядов из собственных функций соответствующих операторов; метод последовательных приближений; метод вырожденных ядер; метод коллокации; метод наименьших квадратов; метод моментов; численные методы, основанные на применении к интегралу общих квадратурных формул.

На сингулярные интегральные уравнения были перенесены многие подходы по численному решению интегральных уравнений. Однако при построении численных методов для сингулярных интегральных уравнений ученые столкнулись со следующей проблемой: сингулярный интеграл, в обычном смысле расходящийся, трактуется в смысле главного значения по Коши.

К настоящему времени множество публикаций посвящено приближенному решению сингулярных интегральных уравнений (см., например, обзорные статьи [3], [4], [13], а также монографии [5], [14], [15], [20], [24], [64]). Эффективность численных методов для решения подобных задач во многом зависит от способа дискретизации задачи, т. е. от получения тем или иным способом системы линейных алгебраических уравнений. Однако необходимость численного решения систем алгебраических уравнений заставляет рационально подходить к выбору вычислительных алгоритмов. Обзор этих методов можно найти в [28], [29], [31]. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения, в том числе и метод ортогональных многочленов.

Метод ортогональных многочленов базируется на замечательном свойстве классических многочленов, которые в большинстве случаев являются собственными функциями многих интегральных операторов и этим позволяют получить спектральные соотношения для интегралов, входящих в уравнение. Наличие спектрального соотношения позволяет легко построить явное решение интегрального уравнения. Для численного решения некоторых сингулярных интегральных уравнений метод ортогональных многочленов применяется давно. Значительный вклад в его разработку внесли M. A. Golberg [4]. А. В. Джишкариани [19] и Г. Я. Попов [32].

Отметим, что с появлением перщых ЭВМ началось широкое внедрение в численный анализ многочленов Чебышева (см., например, [7], [54], [30], [11] и др.).

Данная монография состоит из шести глав и приложения и написана на основе работ, выполненных автором, что отразилось не только на выборе материала по приближенному решению некоторых сингулярных интегральных уравнений с использованием многочленов Чебышева [6], [33] – [52], [61] – [63], но и на библиографии, которая не претендует на исчерпывающую полноту. В первой главе рассматриваются сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши, для которых получены алгоритмы численного решения, основанные на разложении характеристического оператора по многочленам Чебышева.

Во второй главе построены алгоритмы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений с произвольными коэффициентами методом ортогональных многочленов. В этой главе даны элементы теории решения указанных сингулярных интегральных уравнений, приводятся спектральные соотношения для характеристического оператора, т. е. разложения характеристического оператора по многочленам Чебышева первого и второго рода. На базе этих спектральных соотношений строятся алгоритмы приближенного решения характеристического и полного уравнений в разных классах функций и дается обоснование схем с указанием оценки порядка погрешности приближенного решения в равномерной метрике.

В третьей главе рассматриваются алгоритмы приближенного решения методом ортогональных многочленов сингулярных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами.

В четвертой главе получены разложения по многочленам Чебышева первого и второго рода сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью. Далее на основании этих разложений выведены квазиспектральные соотношения для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, которые представляют самостоятельный интерес. На базе полученных квазиспек-тральных соотношений построены алгоритмы приближенного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода (как характеристического, так полного со специальной правой частью, имеющей логарифмическую особенность). Дано обоснование схем.

В пятой главе приводятся элементы теории решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с кратными ядрами Коши, указаны постановки задач для получения решения в разных классах функций, рассматриваются алгоритмы приближенного решения методом ортогональных многочленов указанных сингулярных интегральных уравнеий. Дано обоснование схем.

В шестой главе даны некоторые основные сведения из теории решения одного векторного сингулярного интегрального уравнения второго рода, указаны постановки задач для получения решения в разных классах функций, рассматриваются алгоритмы приближенного решения методом ортогональных многочленов.

В приложении приведены примеры численного решения некоторых модельных сингулярных интегральных уравнений, подтверждающие эффективность построенных в монографии вычислительных схем для разработанных алгоритмов.

Выражаю глубокую признательность моему научному руководителю и соавтору многих работ доктору физико-математических наук, профессору Шешко Михаилу Антоновичу, который заинтересовал меня, показал перспективность изучения этого раздела вычислительной математики и оказывал постоянную помощь в период совместной работы.

Выражаю признательность доктору физико-математических наук В. М. Волкову за рецензию, советы и замечания, способствующие улучшению монографии.

За помощь в оформлении рукописи выражаю благодарность профессору В. Г. Кротову.

Ваши замечания, предложения и вопросы отправляйте по адресу: 220050, Минск, пр. Независимости, 4, кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования, механико-математический факультет, Белорусский государственный университет.

Глава 1

Базовые сведения

1.1. Объекты исследования

В монографии расматриваются алгоритмы численного решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши в скалярном

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{m(x,\,t)}{t-x}\varphi(t)dt = f(x), \quad -1 < x < 1$$

и векторном случаях

$$A(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{M(x,\,t)}{t-x}\,\varphi(t)dt = f(x), \qquad -1 < x < 1,$$

где $A(x) = \Big(a_{k\,j}(x)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$, $M(x,\,t) = \Big(m_{k\,j}(x,\,t)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$, а также сингулярные интегральные уравнения с кратными ядрами Коши. Интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

В теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши известны так называемые спектральные соотношения для сингулярных интегралов (см. [7] или [10]):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}T_n(t)\frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad n = 0,\ 1,\ \ldots\ , \quad |x| < 1, \\ &\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ , \quad |x| < 1, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

где $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$, $U_{n-1}(x) = \dfrac{\sin(n\,\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ – многочлены Чебышева первого и второго рода.

Применение данных спектральных соотношений (1.1.1) позволяет построить основанные на аппроксимации функций по многочленам Чебышева вычислительные схемы приближенного решения как следующего СИУ первого рода

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,\,t)\varphi(t)dt=f(x),\ -1<x<1,$$

так и СИУ с кратными ядрами Коши:

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(t_1,t_2)\frac{dt_1dt_2}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)}+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k(x_1,x_2,t_1,t_2)\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2=f(x_1,x_2),$$
$$(x_1,x_2)\in D^2,$$

где $D^2=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$, $k(x_1,x_2,t_1,t_2)$ и $f(x_1,x_2)$ – заданные функции класса Гельдера по каждой переменной, $\varphi(t_1,t_2)$ – искомая функция, и

$$\frac{1}{\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$
$$+\frac{1}{\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3=f(x_1,x_2,x_3),$$
$$(x_1,x_2,x_3)\in D^3,$$

$D^3=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$, $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$ и $f(x_1,x_2,x_3)$ – заданные функции класса Гельдера по каждой переменной, $\varphi(t_1,t_2,t_3)$ – искомая функция.

1.1.1. Скалярный случай

СИУ с произвольными комплексными коэффициентами

Пусть дано сингулярное интегральное уравнение вида

$$a(x)\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{m(x,\,t)}{t-x}\varphi(t)dt=f(x),\quad -1<x<1,\tag{1.1.2}$$

где $a(x)$, $m(x,\,t)$, $f(x)$ – заданные на $[-1,\ 1]$ функции, непрерывные по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая функция.

Не вдаваясь в подробности, которые можно найти в [26], [17], приведем основные сведения из теории уравнения (1.1.2).

В [26] предлагается два варианта преобразования ядра $m(x,\,t)$ уравнения:

$$\frac{m(x,\,t)}{t-x}=\frac{m(x,x)}{t-x}+\frac{m(x,\,t)-m(x,x)}{t-x},$$

$$b(x)=m(x,x),\quad k(x,\,t)=\frac{m(x,\,t)-m(x,x)}{t-x},$$

и уравнение (1.1.2) записывается в виде

$$a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}k(x,\,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad -1 < x < 1, \quad (1.1.3)$$

и второй

$$\frac{m(x,\,t)}{t-x} = \frac{m(t,t)}{t-x} + \frac{m(x,\,t)-m(t,t)}{t-x},$$

$$b(t) = m(t,t),$$

$$k(x,\,t) = \frac{m(x,\,t)-m(t,t)}{t-x},$$

когда уравнение (1.1.2) записывается в виде

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}b(t)\varphi(t)\frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}k(x,\,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad -1 < x < 1. \quad (1.1.4)$$

Предполагается, что $b(x) \not\equiv 0, \quad a^2(x) - b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [-1,1]$.

В дальнейшем для построения эффективных вычислительных алгоритмов целесообразно иметь дело с уравнением (1.1.4), записанным в другой форме.

Выполним переход в уравнении (1.1.4) к новой неизвестной функции $u(x)$ по правилу:

$$\varphi(x) = \frac{Z(x)\,u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}, \quad (1.1.5)$$

где

$$Z(x) = [a(x)+b(x)]X^+(x) = [a(x)-b(x)]X^-(x), \quad -1 < x < 1.$$

Имеет место представление [26]:

$$Z(x) = (x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}Z_0(x), \quad \operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\beta > -1,$$

$Z_0(x)$ – ограниченная функция.

Здесь $X^{\pm}(x)$ – предельные значения канонической функции $X(z)$ задачи линейного сопряжения

$$X^+(x) = \frac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}X^-(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1.1.6)$$

Известно [26], [17], что решением задачи (1.1.6) является функция

$$X^+(x) = (x-1)^{-\varkappa_1}(x+1)^{-\varkappa_2}e^{\Gamma^+(x)},$$

где

$$
\begin{aligned}
&\varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa, \\
&\Gamma^+(x) = \frac{1}{2}\ln G(x) + \Gamma(x), \\
&\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln G(t)}{t-x}dt, \quad G(x) = \frac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}, \\
&a^2(x) - b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [-1, 1].
\end{aligned}
$$

Входящие в показатели целые числа $\varkappa_1, \varkappa_2$ подбираются так, чтобы в окрестностях точек ± 1 функция $X(z)$ принадлежала заданному классу. Такому же классу принадлежит и решение $\varphi(x)$.

Число $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$ называется *индексом задачи линейного сопряжения* (1.1.6) или, что то же самое, характеристического уравнения (1.1.4) ($k(x, t) \equiv 0$).

Напомним определение класса h, введенного Мусхелишвили [26].

Мы говорим, что каноническая функция $X(z)$ задачи линейного сопряжения (1.1.6) принадлежит классу $h(0)$, если в окрестности точек $z = \pm 1$ она допускает интегрируемую особенность. Класс $h(-1,\ 1)$ определяется тем, что $X(z)$ ограничена вблизи точек $z = \pm 1$. Классы $h(1)$ и $h(-1)$ означают интегрируемую неограниченность в окрестности точек $z = -1$ и $z = 1$ соответственно.

Вводя обозначения

$$
A(x) = \frac{a(x)}{a^2(x) - b^2(x)}, \qquad B(x) = \frac{b(x)}{a^2(x) - b^2(x)},
$$

уравнение (1.1.4) примет вид

$$
K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1, \tag{1.1.7}
$$

в котором

$$
\begin{aligned}
K^0(u(x);\, x) &\overset{\text{def}}{=} A(x)Z(x)\, u(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, u(t)\frac{dt}{t-x}, \\
k(u(x);\, x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)}k(x,\, t)\, u(t)dt,
\end{aligned} \tag{1.1.8}
$$

и оператор K^0 называется характеристическим.

Спектральные соотношения

Пусть $\varkappa$ – индекс оператора K^0. В [64] получены спектральные соотношения для оператора $K^0(x^k; x)$, которые позволили получить эффективные вычислительные схемы приближенного решения уравнения (1.1.7), а именно:

$$K^0(x^k;\ x) = A(x)Z(x)\,x^k + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,t^k\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 0,\ \ldots,\ \varkappa-1, \quad \varkappa > 0, \\ p_\varkappa x^{k-\varkappa} + p_{\varkappa+1}x^{k-\varkappa-1} + \ldots + p_k, & k = \varkappa,\ \varkappa+1,\ \ldots, \quad \varkappa \geqslant 0, \\ p_{|\varkappa|}x^{k+|\varkappa|} + p_{|\varkappa|+1}x^{k+|\varkappa|-1} + \ldots + p_{|\varkappa|+k}, & k = 0,\ 1,\ \ldots, \quad \varkappa < 0, \end{cases} \tag{1.1.9}$$

где коэффициенты $p_\varkappa,\ p_{\varkappa+1},\ \ldots,\ \ p_{|\varkappa|},\ p_{|\varkappa|+1},\ \ldots,$ находятся соответственно из разложений канонической функции $X(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$X(z) = z^{-\varkappa}(p_\varkappa + p_{\varkappa+1}z^{-1} + \ldots), \quad p_\varkappa = 1, \quad \varkappa \geqslant 0, \tag{1.1.10}$$

$$X(z) = z^{|\varkappa|}(p_{|\varkappa|} + p_{|\varkappa|+1}z^{-1} + \ldots), \quad p_{|\varkappa|} = 1, \quad \varkappa < 0. \tag{1.1.11}$$

Соотношение (1.1.9) демонстрирует тот факт, что степенная функция оператором K^0 преобразуется в многочлен. Поэтому рассмотрим доказательство спектральных соотношений (1.1.9).

Вводится вспомогательный интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda} X(\zeta)\,\zeta^k\frac{d\zeta}{\zeta-z} = X(z)\,z^k - G_\infty(z),$$

где Λ – замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\ 1]$, с положительным направлением по движению часовой стрелки, $G_\infty(z)$ – главная часть на бесконечности функции $X(z)\,z^k$. Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,\ 1]$, получается

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-1}^{1} X^+(t)\,t^k\frac{dt}{t-z} + \int\limits_{1}^{-1} X^-(t)\,t^k\frac{dt}{t-z}\right) = X(z)\,z^k - G_\infty(z).$$

Используются далее легко проверяемые соотношения

$$\begin{aligned} X^+(x) + X^-(x) &= 2\,A(x)Z(x), \qquad -1 < x < 1, \\ X^+(x) - X^-(x) &= -2\,B(x)Z(x), \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Теперь

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-1}^{1} X^+(t)\,t^k\frac{dt}{t-z} - \int\limits_{-1}^{1} X^-(t)\,t^k\frac{dt}{t-z}\right) =$$

$$= -\frac{2}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,t^k\frac{dt}{t-z} = X(z)\,z^k - G_\infty(z).$$

Применение формулы Сохоцкого-Племеля дает равенство

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,t^k\frac{dt}{t-x} = -\frac{1}{2}\left(X^+(x)+X^-(x)\right)\,x^k + G_\infty(x) = -A(x)Z(x)\,x^k + G_\infty(x).$$

Следовательно,

$$K^0(x^k;\ x) = A(x)Z(x)\,x^k + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,t^k\frac{dt}{t-x} = G_\infty(x).$$

Но $G_\infty(x)$ легко подсчитывается:

$$G_\infty(x) = \begin{cases} 0, & k=0,\ 1,\ \dots\ ,\ \varkappa-1, \quad \varkappa>0,\\ p_\varkappa x^{k-\varkappa} + p_{\varkappa+1}x^{k-\varkappa-1} + \ldots + p_k, & k=\varkappa,\ \varkappa+1,\ \dots\ , \quad \varkappa\geqslant 0,\\ p_{|\varkappa|}x^{k+|\varkappa|} + p_{|\varkappa|+1}x^{k+|\varkappa|-1} + \ldots + p_{2|\varkappa|+k}, & k=0,\ 1,\ \dots\ , \quad \varkappa<0. \end{cases}$$

По свойству линейности оператора K^0, оператор $K^0(P_{k+\varkappa}(x);x)$, где $P_{k+\varkappa}(x)$ – многочлен степени $k+\varkappa\geqslant 0$, – также многочлен степени k с известными коэффициентами (по степеням x) .

Заметим, что решение уравнения при указанном подходе представляется в виде алгебраического многочлена, однако, как подчеркнуто в [9, с. 187], такой подход не всегда оправдан. Если требуется получить решение с высокой степенью точности, то целесообразно искать решение в виде линейной комбинации ортогональных многочленов, например многочленов Чебышева или Якоби. Пример применения многочленов Якоби для решения уравнения (1.1.4) в случае, когда $a(x)$ и $b(x)$ есть постоянные числа, дан в [21].

В монографии на базе аналогов формул (1.1.9) для оператора K^0, а именно формул вида

$$\begin{aligned}
K^0(T_{k+\varkappa};x) &= \alpha_0^{(k)}U_0(x) + \alpha_1^{(k)}U_1(x) + \ldots + \alpha_k^{(k)}U_k(x), && k\geqslant 0, && \varkappa\geqslant 0,\\
K^0(U_{k+\varkappa};x) &= \rho_0^{(k)}U_0(x) + \rho_1^{(k)}U_1(x) + \ldots + \rho_k^{(k)}U_k(x), && k\geqslant 0, && \varkappa\geqslant 0,\\
K^0(T_{k+\varkappa};x) &= \gamma_0^{(k)}\,T_0(x) + \gamma_1^{(k)}\,T_1(x) + \cdots + \gamma_k^{(k)}\,T_k(x), && k\geqslant 0, && \varkappa\geqslant 0,\\
K^0(U_{k+\varkappa};x) &= \eta_0^{(k)}T_0(x) + \eta_1^{(k)}T_1(x) + \ldots + \eta_k^{(k)}T_k(x), && k\geqslant 0, && \varkappa\geqslant 0,\\
K^0(T_{k-|\varkappa|};x) &= \delta_0^{(k)}U_0(x) + \delta_1^{(k)}U_1(x) + \ldots + \delta_k^{(k)}U_k(x), && k\geqslant |\varkappa|, && \varkappa<0,\\
K^0(U_{k-|\varkappa|};x) &= \sigma_0^{(k)}U_0(x) + \sigma_1^{(k)}U_1(x) + \ldots + \sigma_k^{(k)}U_k(x), && k\geqslant |\varkappa|, && \varkappa<0,\\
K^0(U_{k-|\varkappa|};x) &= \beta_0^{(k)}T_0(x) + \beta_1^{(k)}T_1(x) + \ldots + \beta_k^{(k)}T_k(x), && k\geqslant |\varkappa|, && \varkappa<0,\\
K^0(T_{k-|\varkappa|};x) &= \mu_0^{(k)}\,T_0(x) + \mu_1^{(k)}\,T_1(x) + \cdots + \mu_k^{(k)}\,T_k(x), && k\geqslant |\varkappa|, && \varkappa<0,
\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

построены вычислительные схемы с неотрицательным и отрицательным индексами для уравнения (1.1.7). Дано обоснование схем с указанием оценки порядка погрешности приближенного решения.

О квазиспектральных соотношениях

В монографии также рассматриваются спектральные соотношения для сингулярных интегралов со степенно-логарифмической особенностью, которые мы назвали *квазиспектральными соотношениями*. Чтобы их получить, вначале выводятся разложения сингулярных интегралов со степенно-логарифмической особенностью и ядром Коши

$$K^0(p\,f)(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1-t}{1+t}\,p(t)\,f(t)\frac{dt}{t-x}, \quad -1<x<1$$

в виде комбинации многочленов Чебышева первого или второго рода, где $p(x)$ имеет вид: $p(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $|\alpha|=|\beta|=0,5$.

После того как были получены такие разложения, нам удалось их упростить, используя возможности компьютерной алгебры систем компьютерной математики. Это упрощение не только существенно сокращает время по их вычислению, но и визуализирует результаты.

Используя квазиспектральные соотношения в методе ортогональных многочленов, построены вычислительные схемы численного решения СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k(x,\,t)\varphi(t)dt=\ln\frac{1-x}{1+x}f(x)+g(x), \quad -1<x<1,$$

и

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)}=\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}f(x,y),$$
$$(x,y)\in D^2, \quad D^2=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1].$$

Приведены обоснования вычислительных схем с указанием оценки порядка погрешности приближенного решения.

1.1.2. Векторный случай

Рассматривается векторное сингулярное интегральное уравнение вида

$$A(x)\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{M(x,\,t)}{t-x}\,\varphi(t)dt=f(x), \qquad -1<x<1, \tag{1.1.13}$$

где $A(x)=\Big(a_{k\,j}(x)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$, $M(x,\,t)=\Big(m_{k\,j}(x,\,t)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$ – заданные на $[-1,\ 1]$ комплекснозначные матрицы, элементы которых непрерывны по Гельдеру, $f(x)=\Big(f_1(x),\ f_2(x)\Big)^T$ – заданный на $[-1,\ 1]$ вектор из класса Гельдера.

Пусть
$$B(x) = M(x, x).$$

Предположим, что
$$\det(A(x) \pm B(x)) \neq 0 \quad \forall x \in [-1,\ 1].$$

Вектор $\varphi(x) = \Big(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\Big)^T$ ищется как в классе функций, непрерывных по Гельдеру на $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, а в окрестности точек $x = \pm 1$ допускающих интегрируемые особенности, так и в классе непрерывных по Гельдеру и ограниченных на $[-1,\ 1]$ функций.

После выполнения над ядром преобразования
$$\frac{M(x,\,t)}{t-x} = \frac{M(t,t)}{t-x} + \frac{M(x,\,t) - M(t,t)}{t-x}$$
и введения обозначения
$$\frac{M(x,\,t) - M(t,t)}{t-x} = K(x,\,t) = \Big(k_{l\,m}(x,\,t)\Big)^2_{l,\,m=1}$$
уравнение (1.1.13) запишем в форме
$$A(x)\,\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)\,\varphi(t)\frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} K(x,\,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x),\ -1 < x < 1. \quad (1.1.14)$$

Теория уравнения (1.1.14) построена в 1940–1950-х гг. и изложена в [12], [16].

Теория векторного сингулярного уравнения существенно отличается от теории скалярного уравнения (см. [26], [12], [16]). Имеется несколько публикаций – [20], [5], посвященных разработке вычислительных схем для векторного уравнения, характеристический оператор которого имеет нулевые частные индексы.

В [59], [60] предложен метод приближенного решения векторного уравнения с ненулевыми частными индексами характеристического оператора в случае, когда линией интегрирования является единичная окружность. Аппаратом аппроксимации в этом случае являются тригонометрические многочлены.

В монографии рассматривается векторное уравнение, линией интегрирования которого является интервал $(-1,\ 1)$, при этом существенно используются разложения векторного характеристического оператора с ненулевыми частными индексами по многочленам Чебышева первого и второго рода.

1.2. О рекуррентных соотношениях Кленшоу

Имеется простой способ вычисления выражений вида

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x),$$

не прибегая к вычислению значений функции $T_i(x)$. Такой способ был предложен Кленшоу в 1955 г., а его реализация описана, например, в [22] или [11]. Приведем эту реализацию.

1. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, T_k(x). \tag{1.2.1}$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k - 2\,x\,b_{k+1} + b_{k+2} = a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n,\ b_{n-1},\ \dots\ ,\ b_0$.

Подстановка в формулу (1.2.1) выражения для a_k дает

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (b_k - 2\,x\,b_{k+1} + b_{k+2})\, T_k(x) + (b_{n-1} - 2\,x\,b_n)\, T_{n-1}(x) + b_n\, T_n(x).$$

Имеют место формулы [30]

$$\begin{aligned}
&T_{n+1}(x) - 2\,x\,T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,\\
&T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x,\\
&U_{n+1}(x) - 2\,x\,U_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,\\
&U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2\,x, \qquad n = 1,\ 2,\ \dots\ .
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

В силу формулы (1.2.2) все коэффициенты при b_k равны нулю, за исключением b_0 и b_1.

Таким образом,

$$f(x) = (b_0 - 2\,x\,b_1)\, T_0(x) + b_1\, T_1(x)$$

или окончательно

$$f(x) = b_0 - x\,b_1.$$

По аналогии с данным алгоритмом, используя формулы [30]

$$\begin{aligned}
&2T_n(x)\, T_m(x) = T_{m-n}(x) + T_{m+n}(x),\\
&2T_n(x)\, U_m(x) = U_{m-n}(x) + U_{m+n}(x),\\
&T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_2(x) = 2\,x^2 - 1, \qquad T_3(x) = 4\,x^3 - 3x,\\
&U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2\,x, \qquad U_2(x) = 4\,x^2 - 1, \qquad U_3(x) = 8\,x^3 - 4x,
\end{aligned}$$

можно получить следующие схемы.

2. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, T_{2k}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2\,(2\,x^2 - 1)\,b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n,\ b_{n-1},\ \dots\ ,\ b_0$.

Тогда

$$f(x) = b_0\,T_0(x) + b_1\,T_2(x) - 2\,(2\,x^2 - 1)\,b_1\,T_0(x)$$

или

$$f(x) = b_0 - (2\,x^2 - 1)\,b_1.$$

3. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, T_{2k+1}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k - 2\,x\,b_{k+1} + b_{k+2} = a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n,\ b_{n-1},\ \dots\ ,\ b_0$.

Тогда

$$f(x) = b_0\,T_1(x) + b_1\,T_3(x) - 2\,(2\,x^2 - \ 1)\,b_1\,T_1(x)$$

или

$$f(x) = x\,(b_0 - b_1).$$

4. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, U_k(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2\,(2\,x^2 - 1)\,b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n,\ b_{n-1},\ \dots\ ,\ b_0$.

Тогда

$$f(x) = (b_0 - 2\,x\,b_1)\,U_0(x) + b_1\,U_1(x)$$

или окончательно

$$f(x) = b_0.$$

5. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k\, U_{2k}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2\,(2\,x^2 - 1)\, b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n,\ b_{n-1},\ \ldots\ ,\ b_0$.

Тогда

$$f(x) = b_0\, U_0(x) + b_1\, U_2(x) - 2\,(2\,x^2 - 1)\, b_1\, U_0(x)$$

или

$$f(x) = b_0 + b_1.$$

6. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, U_{2k+1}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2\,(2\,x^2 - 1)\, b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n,\ b_{n-1},\ \ldots\ ,\ b_0$.

Тогда

$$f(x) = b_0\, U_1(x) + b_1\, U_3(x) - 2\,(2\,x^2 - \ 1)\, b_1 U_1(x)$$

или

$$f(x) = 2\,x\, b_0.$$

Глава 2

Сингулярные интегральные уравнения с произвольными коэффициентами

2.1. Основные сведения из теории СИУ и вспомогательные результаты

2.1.1. Характеристическое уравнение

Если искомое решение $\varphi(x) = \dfrac{Z(x)\,u(x)}{a^2(x) - b^2(x)}$ (определяемое (1.1.5)) принадлежит классу $h(0)$ и индекс $\varkappa$ характеристического оператора (1.1.8) K^0 или, что то же самое, задачи (1.1.6), неотрицателен, то решение характеристического уравнения

$$K^0(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1 \tag{2.1.1}$$

определяется формулой [26], [17]

$$u(x) = \frac{a(x)}{Z(x)} f(x) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{b(t)}{Z(t)} f(t) \frac{dt}{t - x} + \gamma_0 + \gamma_1\, x + \cdots + \gamma_{\varkappa-1}\, x^{\varkappa-1}, \tag{2.1.2}$$

где $\gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{\varkappa-1}$ – произвольные комплексные числа.

Эти числа ($\varkappa > 0$) будут однозначно определены, если к (2.1.1) присоединить условия

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B(t) Z(t)\, u(t)\, t^{j-1} dt = \alpha_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa, \tag{2.1.3}$$

где α_j – заданные числа.

Если же решение уравнения (2.1.1) ищется в классе $h(-1,\ 1)$ и $\varkappa < 0$, тогда при выполнении условий (необходимых и достаточных)

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{b(t)}{Z(t)} f(t)\, t^{q-1} dt = 0, \qquad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ |\varkappa|,$$

решение $u(x)$ определяется формулой (2.1.2) с $\gamma_k \equiv 0, \; k = 0, \; 1, \; \ldots$.

2.1.2. Полное уравнение

Уравнение (1.1.4), записанное в форме (1.1.7)

$$K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \; -1 < x < 1,$$

в классе $h(0)$ эквивалентно (в смысле разрешимости) интегральному уравнению Фредгольма

$$u(x) + \int\limits_{-1}^{1} N(x,\, t)\, u(t) dt = F(x), \quad -1 < x < 1, \tag{2.1.4}$$

в котором

$$N(x,\, t) = \frac{1}{\pi i} \frac{Z(t)}{Z(x)(a^2(t) - b^2(t))} \left[a(x) k(x,\, t) - \frac{Z(x)}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{b(\tau)}{Z(\tau)} k(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - x} \right],$$

$$F(x) = \frac{a(x)}{Z(x)} f(x) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{b(t)}{Z(t)} f(t) \frac{dt}{t - x} + P_{\varkappa-1}(x),$$

$$P_{\varkappa-1}(x) = \gamma_0 + \cdots + \gamma_{\varkappa-1}\, x^{\varkappa-1}.$$

Если однородное уравнение (2.1.4) ($F(x) \equiv 0$) неразрешимо (имеет только нулевое решение), то решение неоднородного уравнения (2.1.4) дается формулой

$$u(x) = F(x) - \int\limits_{-1}^{1} \Gamma(x,\, t) F(t) dt,$$

где $\Gamma(x,\, t)$ – резольвента ядра $N(x,\, t)$.

Справедлива следующая теорема [64].

Теорема 2.1.1. *Пусть искомое решение $\varphi(x)$ уравнения (1.1.4) принадлежит классу $h(0)$, индекс $\varkappa$ характеристического оператора K^0, определяемого (1.1.8), больше нуля, однородное уравнение (2.1.4) неразрешимо. Тогда задача*

$$\begin{gathered} K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1, \\ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B(t) Z(t)\, u(t)\, t^{j-1} dt = \alpha_j, \qquad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, \varkappa, \end{gathered} \tag{2.1.5}$$

имеет единственное решение.

Если решение $\varphi(x)$ уравнения (1.1.4) принадлежит классу $h(-1,1)$ (класс ограниченных функций) и $\varkappa < 0$, то уравнение (1.1.4), записанное в форме (1.1.7), эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма

$$u^*(x) + \int\limits_{-1}^{1} N^*(x,\,t)\,u^*(t)dt = F^*(x), \quad -1 < x < 1, \tag{2.1.6}$$

в котором

$$N^*(x,\,t) = \frac{1}{\pi i}\frac{1}{a^2(t)-b^2(t)}\left[a(x)k(x,\,t) - \frac{Z(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(\tau)}{Z(\tau)}k(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - x}\right],$$

$$F^*(x) = a(x)f(x) - \frac{Z(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f(t)\frac{dt}{t-x},$$

$$u^*(x) = Z(x)\,u(x),$$

с присоединенными к нему уравнениями (условиями разрешимости)

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f(t)\,t^{j-1}dt = \frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}\frac{Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}k(t,\tau)\,u(\tau)\,t^{j-1}d\tau dt,$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|.$$

2.1.3. Вывод спектральных соотношений (1.1.12)

Для вывода разложения характеристического оператора (1.1.8) по многочленам Чебышева первого или второго рода приведем некоторые вспомогательные сведения.

Известно, что

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_k^{(n)} x^{n-2k},$$

$$a_0^{(n)} = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 2^{n-1}, & n>0, \end{cases} \qquad a_{k+1}^{(n)} = -\frac{(n-2k-1)\,(n-2k)}{4(k+1)\,(n-k-1)}\,a_k^{(n)}, \tag{2.1.7}$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_k^{(n-1)} x^{n-1-2k},$$

$$b_0^{(n-1)} = 2^{n-1}, \qquad b_k^{(n-1)} = -\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{4k(n-k)}\,b_{k-1}^{(n-1)}, \tag{2.1.8}$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Лемма 2.1.1. *В окрестности бесконечно удаленной точки имеет место представление*

$$\frac{T_M(z)}{\sqrt{z^2-1}} = U_{M-1}(z) + R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right), \quad M \geqslant 0, \tag{2.1.9}$$

где

$$R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^{(M)}}{z^k},$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases} \qquad q_2^{(M)} = \begin{cases} 0,5\,, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$q_{2l-1+\delta_M}^{(M)} = 0, \qquad q_{2l-\delta_M}^{(M)} = \sum_{m=0}^{[\frac{M}{2}]} a_{[\frac{M}{2}]-m}^{(M)} \epsilon_{l+m-\delta_M}, \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\delta_M = (M+1) \bmod 2.$$

Доказательство. Поскольку при больших $|z|$ имеет место разложение

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{z^{2k+1}},$$

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}\,\epsilon_k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,$$

то с учетом (2.1.7) получим

$$\frac{T_M(z)}{\sqrt{z^2-1}} = \left(\sum_{k=0}^{[\frac{M}{2}]} a_k^{(M)} z^{M-2k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{z^{2k+1}}\right) = P_{M-1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^{(M)}}{z^k}, \tag{2.1.10}$$

где $P_{M-1}(z)$ – некоторый многочлен степени $M-1$. Для подсчета коэффициентов $q_1^{(M)}$, $q_2^{(M)}$, ... воспользуемся теорией вычетов.

Если Λ – замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\ 1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \frac{T_M(\sigma)}{\sqrt{\sigma^2-1}}d\sigma = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(T_M(z)\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\right) = -q_1^{(M)}.$$

Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,\ 1]$, получим

$$q_1^{(M)} = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-1}^{1} \frac{T_M(t)}{(i)\sqrt{1-t^2}}dt - \int_{-1}^{1} \frac{T_M(t)}{(-i)\sqrt{1-t^2}}dt\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_M(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\cos(M\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(Mx)dx = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты можно подсчитать из выражения

$$q_k^{(M)} = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(z^{k-1}\frac{T_M(z)}{\sqrt{z^2-1}}\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} t^{k-1}\frac{\cos(M\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad k=2,\ 3,\ \dots\ ,$$

или непосредственно по формуле перемножения рядов.

Теперь докажем, что в (2.1.10) $P_{M-1}(z) \equiv U_{M-1}(z)$, применив метод математической индукции и привлекая рекуррентные формулы для многочленов $T_n(x)$, $U_n(x)$, а именно:

$$\begin{aligned} &T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x),\\ &U_{n+1}(x) = 2\,x\,U_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n=1,\ 2,\ \dots\ . \end{aligned}$$

1. При $M=0$ и $M=1$ утверждение (2.1.9) верно.
2. Пусть оно верно при $M=n$.
3. Докажем справедливость (2.1.9) при $M=n+1$. Имеем

$$\frac{T_{n+1}(z)}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{2\,z\,T_n(z) - T_{n-1}(z)}{\sqrt{z^2-1}} =$$

$$= 2z\left(U_{n-1}(z) + \frac{q_1^{(n)}}{z} + \cdots\right) - \left(U_{n-2}(z) + \frac{q_1^{(n-1)}}{z} + \cdots\right) =$$

$$= \Big(2zU_{n-1}(z) - U_{n-2}(z)\Big) + \left(2q_1^{(n)} + \frac{q_1^{(n+1)}}{z} + \cdots\right) =$$

$$= U_n(z) + R_\infty^{(n+1)}\left(\frac{1}{z}\right),$$

так как $q_1^{(n)} = 0$ при $n>0$. □

Аналогично доказывается и следующая лемма, если иметь в виду, что при больших $|z|$ имеет место разложение

$$\sqrt{z^2-1} = z - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{z^{2k+1}},$$

$$e_0 = 0,5, \qquad e_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4}\,e_k, \qquad k=0,\ 1,\ \dots\ .$$

Лемма 2.1.2. *В окрестности бесконечно удаленной точки имеет место представление*

$$\begin{aligned} &\sqrt{z^2-1}\,U_{N-1}(z) = T_N(z) + R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right), \quad N>0,\\ &R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{(N)}}{z^k}, \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

где

$$
\begin{aligned}
&d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N=1,\\ 0, & N\neq 1,\end{cases}\\
&d_{2l-1+\delta_N}^{(N)} = 0,\\
&d_{2l-\delta_N}^{(N)} = -\sum_{m=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b^{(N-1)}_{\left[\frac{N-1}{2}\right]-m} e_{l+m-\delta_N}, \quad l=1,\ 2,\ \dots\ ,\\
&\delta_N = N \bmod 2.
\end{aligned}
$$

Приведем еще некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2.1.3. *Для любого многочлена степени* $M \geqslant 0$ *справедливо*

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} A(t) Z(t) P_M(t)\,dt = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,X(z)\,P_M(z)\right), \tag{2.1.12}
$$

$$
\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)\,Z(t)\,P_M(t)\,dt = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,P_M(z)\Big), \tag{2.1.13}
$$

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,A(t)\,Z(t)\,P_M(t)\,dt = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,X(z)\,P_M(z)\right), \tag{2.1.14}
$$

Доказательство. На основании теории вычетов имеем

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2-1}}\,X(\zeta)\,P_M(\zeta)\,d\zeta = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,X(z)\,P_M(z)\right), \tag{2.1.15}
$$

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} X(\zeta)\,P_M(\zeta)\,d\zeta = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,P_M(z)\Big), \tag{2.1.16}
$$

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \sqrt{\zeta^2-1}X(\zeta)P_M(\zeta)d\zeta = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,X(z)\,P_M(z)\right), \tag{2.1.17}
$$

где Λ – замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\ 1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки.

Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,\ 1]$ и учитывая легко проверяемые соотношения

$$
\begin{aligned}
X^+(x) + X^-(x) &= 2\,A(x)\,Z(x),\\
X^+(x) - X^-(x) &= -2\,B(x)\,Z(x), \quad -1 < x < 1,
\end{aligned}
$$

от (2.1.15) – (2.1.17) приходим к равенствам (2.1.12) – (2.1.14). □

2.2. Разложение по многочленам Чебышева

Пусть, как и ранее, имеет место (1.1.8).

Рассмотрим различные варианты разложения оператора K^0 по многочленам Чебышева первого и второго рода, коэффициенты которых вычисляются согласно (2.1.7), (2.1.8).

В следующих теоремах будем использовать переменные $q_r^{(M)}$, $d_r^{(N)}$, $r \geqslant 1$ (из лемм (2.1.1), (2.1.2)) и тождества [30]:

$$\begin{aligned}
&U_n(x)\,T_m(x) = \frac{1}{2}(U_{n+m}(x) + U_{n-m}(x)),\\
&T_{-m}(x) = T_m(x),\\
&U_n(x)\,U_m(x) = \frac{T_{m-n}(x) - T_{n+m+2}(x)}{2(1-x^2)},\\
&U_{-(n+2)}(x) = -U_n(x),\\
&T_n(x)\,T_m(x) = \frac{1}{2}(T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x)).
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

2.2.1. Разложение оператора K^0 по многочленам Чебышева второго рода

Теорема 2.2.1. *Пусть на $[-1,\ 1]$ заданы две комплекснозначные функции $a(x)$ и $b(x)$, непрерывные по Гельдеру, причем $a^2(x) - b^2(x) \neq 0\ \forall x \in [-1, 1]$. Пусть далее $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения (1.1.6) с индексом $\varkappa \geqslant 0$ одного из классов: $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$.*

Тогда для $x \in (-1,\ 1)$ справедлива формула

$$A(x)Z(x)\,T_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_{k+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \alpha_0^{(k)}U_0(x) + \alpha_1^{(k)}U_1(x) + \ldots + \alpha_k^{(k)}U_k(x), \quad k \geqslant 0, \tag{2.2.2}$$

где

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k = 0, \varkappa = 0,\\ 0,5\,, & j = k \neq 0,\ \varkappa = 0,\\ p_{\varkappa+1}, & j = k-1,\ \varkappa = 0,\\ 1, & j = k,\ \varkappa = 1,\\ 2H_{k-j-1} + d_1^{(k-j-1)}, & k-j-2 \geqslant 0,\ \varkappa = 0,\\ 2H_{k+\varkappa-j-1}, & k+\varkappa-j-2 \geqslant 0,\ \varkappa > 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k}, \tag{2.2.3}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M+(1-\varkappa)\delta_\varkappa}{2}\right]} a_r^{(M)} p_{M+1-2r},$$
$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0, \\ 1, & \varkappa \geqslant 1, \end{cases} \quad M \geqslant \delta_\varkappa(\varkappa - 1). \tag{2.2.4}$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} U_j(t)\, U_p(t) dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ \frac{1}{2}, & j = p, \end{cases}$$

то из (2.2.2) находим

$$\frac{1}{2}\alpha_j^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} A(t) Z(t)\, T_{k+\varkappa}(t)\; U_j(t) dt +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(\tau) Z(\tau)\, T_{k+\varkappa}(\tau)\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\; U_j(t)\frac{dt}{\tau - t}\Big) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} A(t) Z(t)\, T_{k+\varkappa}(t)\, U_j(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(\tau) Z(\tau)\, T_{k+\varkappa}(\tau)\, T_{j+1}(\tau) d\tau, \tag{2.2.5}$$

$$j = 0,\ 1,\ \dots,\ k, \qquad k = 0,\ 1,\ \dots .$$

Используя тождества (2.2.1), равенства (2.2.5) запишем в виде

$$\frac{1}{2}\alpha_j^{(k)} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} A(t) Z(t)\, U_{k+\varkappa-j-2}(t) dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} A(t) Z(t)\, U_{k+\varkappa+j}(t) dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} B(t) Z(t)\, T_{k+\varkappa-j-1}(t) dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} B(t) Z(t)\, T_{k+\varkappa+j+1}(t) dt =$$

$$= -I_1^{k+\varkappa-j-2} + I_2^{k+\varkappa+j} + J_1^{k+\varkappa-j-1} + J_2^{k+\varkappa+j+1}.$$

Вычислим при $a(x) \not\equiv 0$ $I_2^{k+\varkappa+j} + J_2^{k+\varkappa+j+1}$ с помощью формул, аналогичных (2.1.14), (2.1.13),

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)\,U_{k+j+\varkappa}(t)dt = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{X}(z)\,U_{k+j+\varkappa}(z)\right), \tag{2.2.6}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,T_{k+j+\varkappa+1}(t)dt = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\mathrm{X}(z)\,T_{k+j+\varkappa+1}(z)\right). \tag{2.2.7}$$

Поскольку при больших $|z|$ имеет место (2.1.11), то, используя (1.1.10), имеем

$$I_2^{k+\varkappa+j} + J_2^{k+\varkappa+j+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\left(p_\varkappa z^{-\varkappa} + p_{\varkappa+1}z^{-\varkappa-1} + \cdots\right)\left(T_{k+j+\varkappa+1}(z) + d_1^{(k+j+\varkappa+1)}z^{-1} + \cdots\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\left(\frac{p_\varkappa}{z^\varkappa} + \frac{p_{\varkappa+1}}{z^{\varkappa+1}} + \cdots\right)T_{k+j+\varkappa+1}(z)\right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \varkappa > 0, \\ 0,25, & \varkappa = 0, \quad j = k = 0, \\ 0, & \varkappa = 0, \quad j = k \neq 0. \end{cases}$$

Чтобы вычислить $-I_1^{k+\varkappa-j-2} + J_1^{k+\varkappa-j-1}$, снова применим формулы (2.2.6), (2.2.7) и учтем (2.1.7), (2.1.8), (2.1.11), а также соотношения:

$$U_{-1}(x) = 0, \quad U_{-2}(x) = -1.$$

Привлекая (2.2.4), имеем

$$-I_1^{k+\varkappa-j-2} + J_1^{k+\varkappa-j-1} =$$

$$= -0,5\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,X(z)\,U_{k-j+\varkappa-2}(z)\right) + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\,T_{k-j+\varkappa-1}(z)\right)\right] =$$

$$= \begin{cases} 0,25, & j = k,\ \varkappa = 0, \\ 0,5\,p_{\varkappa+1}, & j = k-1,\ \varkappa = 0, \\ 0,5\,, & j = k,\ \varkappa = 1, \\ H_{k-j-1} + 0,5\,d_1^{(k-j-1)}, & k-j-2 \geqslant 0,\ \varkappa = 0, \\ H_{k+\varkappa-j-1}, & k+\varkappa-j-2 \geqslant 0,\ \varkappa > 0. \end{cases}$$

Таким образом, верно (2.2.3). □

В частности, если $a(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv 1$, то в классе $h(0)$ $X(z)$ имеет вид: $X(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$. Кроме того, $B(x) \equiv -1$, $Z(x) = \dfrac{i}{\sqrt{1-x^2}}$, $\varkappa = 1$.

В этом случае

$$\frac{1}{2}\alpha_j^{(k)} = -\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}T_{k-j}(z)\right) - \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}T_{k+j+2}(z)\right) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 0,5\,, & j = k, \end{cases}$$

что совпадает с (1.1.1).

Теорема 2.2.2. *Пусть на $[-1,\ 1]$ заданы две комплекснозначные функции $a(x)$ и $b(x)$, непрерывные по Гельдеру, причем $a^2(x) - b^2(x) \neq 0\ \forall x \in [-1,\ 1]$. Пусть далее $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения (1.1.6) с индексом $\varkappa \geqslant 0$ одного из классов: $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$.*

Тогда для $x \in (-1,\ 1)$ справедлива формула

$$A(x)\,Z(x)\,U_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)U_{k+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \rho_0^{(k)}U_0(x) + \ldots + \rho_k^{(k)}U_k(x), \quad k \geqslant 0, \tag{2.2.8}$$

где

$$\rho_j^{(k)} = \begin{cases} 2H_{k+\varkappa-j}, & \varkappa > 0, \\ 2H_{k-j} + q_1^{(k-j)}, & \varkappa = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k}, \tag{2.2.9}$$

$$H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{(M-1+(1-\varkappa)\delta_\varkappa)}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0, \\ 0, & M = 0, \end{cases} \tag{2.2.10}$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0, \\ 1, & \varkappa \geqslant 1. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_j(t)\,U_p(t)dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ 0,5\,, & j = p, \end{cases}$ то из (2.2.8) с учетом (1.1.1) получим:

$$\frac{1}{2}\rho_j^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)\,U_{k+\varkappa}(t)\,U_j(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(\tau)Z(\tau)\,U_{k+\varkappa}(\tau)\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_j(t)\frac{dt}{\tau - t}\Big)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)\,U_{k+\varkappa}(t)\,U_j(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(\tau)Z(\tau)\,U_{k+\varkappa}(\tau)T_{j+1}(\tau)d\tau, \tag{2.2.11}$$

$$j = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ k, \qquad k = 0,\ 1,\ \dots\ .$$

Используя (2.2.1), равенство (2.2.11) запишем в форме

$$\frac{1}{2}\rho_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)\frac{T_{k+\varkappa-j}(t) - T_{k+\varkappa+j+2}(t)}{1-t^2}dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(\tau)Z(\tau)(U_{k+\varkappa+j+1}(\tau) + U_{k+\varkappa-j-1}(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}A(t)Z(t)\frac{T_{k+\varkappa-j}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(\tau)Z(\tau)\,U_{k+\varkappa-j-1}(\tau)d\tau -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}A(t)Z(t)\frac{T_{k+\varkappa+j+2}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(\tau)Z(\tau)\,U_{k+\varkappa+j+1}(\tau)d\tau =$$

$$= I_1^{k+\varkappa-j} + J_1^{k+\varkappa-j-1} - I_2^{k+\varkappa+j+2} + J_2^{k+\varkappa+j+1}.$$

Вычислим $I_1^M + J_1^{M-1}$, $M = k+\varkappa-j$, при $a(x)\not\equiv 0$. Для этого воспользуемся равенствами (2.1.12), (2.1.13) и представлением (2.1.9).

Получим

$$I_1^M + J_1^{M-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)U_{M-1}(z)\Big] - \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right] - \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)U_{M-1}(z)\Big]\right\} =$$

$$= -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)\,U_{M-1}(z)\Big] - \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)\,R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Так как имеет место (1.1.10), то учитывая, что

$$-\operatorname*{Res}_{z=\infty}[X(z)U_{M-1}(z)] = \begin{cases}\sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{(M-1+(1-\varkappa)\delta_\varkappa)}{2}\right]} b_r^{(M-1)}p_{M-2r}, & M>0,\\ 0, & M=0,\end{cases}$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases}0, & \varkappa = 0,\\ 1, & \varkappa\geqslant 1,\end{cases}$$

и используя обозначение (2.2.10), имеем

$$I_1^M + J_1^{M-1} = \begin{cases}H_M, & \varkappa>0,\\ 0,5\,q_1^{(M)} + H_M, & \varkappa = 0.\end{cases}$$

Далее получим при $M = k + \varkappa + j + 2$

$$-I_2^M + J_2^{M-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)U_{M-1}(z)\right] + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right] - \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)U_{M-1}(z)\right]\right\} = 0.$$

Таким образом верно (2.2.9). □

Теорема 2.2.3. *Пусть на $[-1,\ 1]$ заданы две комплекснозначные функции $a(x)$ и $b(x)$, непрерывные по Гельдеру, причем $a^2(x) - b^2(x) \neq 0\ \forall x \in [-1,\ 1]$. Пусть далее $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения (1.1.6) с индексом $\varkappa < 0$ класса $h(-1,\ 1)$.*

Тогда для $x \in (-1,\ 1)$ справедливы формулы

$$A(x)Z(x)\,U_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\frac{U_{k-|\varkappa|}(t)}{t-x}dt =$$

$$= \sigma_0^{(k)}U_0(x) + \sigma_1^{(k)}U_1(x) + \ldots + \sigma_k^{(k)}U_k(x), \quad k \geqslant |\varkappa|\,, \tag{2.2.12}$$

где

$$\sigma_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+2} + \begin{cases} G_0, & j = k - |\varkappa|, \\ G_{j-k+|\varkappa|}, & j > k - |\varkappa|, \\ 2H^*_{k-|\varkappa|-j} + G_{k-|\varkappa|-j}, & j < k - |\varkappa|, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k}, \tag{2.2.13}$$

$$\begin{aligned} H_M^* &= \sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M+2|\varkappa|-2r}, \qquad M > 0, \\ G_M &= \sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} q_r^{(M)} p_{2|\varkappa|-r+1}. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Доказательство. Подобно предыдущему докажем справедливость формулы (2.2.13). Из (2.2.12) имеем

$$\frac{1}{2}\,\sigma_j^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)\,U_j(t)\,U_{k-|\varkappa|}(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(\tau)Z(\tau)\,T_{j+1}(\tau)\,U_{k-|\varkappa|}(\tau)d\tau.$$

Учитывая (2.2.1), получим

$$\frac{1}{2}\,\sigma_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t^2}A(t)Z(t)\,T_{k-|\varkappa|-j}(t)dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,U_{k-|\varkappa|-j-1}dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t^2}A(t)Z(t)\,T_{k-|\varkappa|+j+2}(t)dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,U_{k-|\varkappa|+j+1}dt=$$

$$=I_1^{k-|\varkappa|-j}+J_1^{k-|\varkappa|-j-1}-I_2^{k-|\varkappa|+j+2}+J_2^{k-|\varkappa|+j+1}.$$

При $a(x)\not\equiv 0$ и $M=k-|\varkappa|-j>0$ с учетом (2.1.12), (2.1.13), а затем (2.1.9) имеем

$$I_1^M+J_1^{M-1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}A(t)Z(t)\frac{T_M(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,U_{M-1}(t)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\frac{T_M(z)}{\sqrt{z^2-1}}\right)-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,U_{M-1}(z)\Big).$$

Далее с учетом разложения (1.1.11) и обозначений (2.2.14) получаем при $k\ -|\varkappa|-j>0$

$$I_1^{k-|\varkappa|-j}+J_1^{k-|\varkappa|-j-1}=H^*_{k-|\varkappa|-j}+0,5\ G_{k-|\varkappa|-j}.$$

Если же $k-|\varkappa|-j=0$, то $I_1^0+J_1^{-1}=0,5\ G_0$, так как $U_{-1}(x)=0$.

При $M=k-|\varkappa|-j<0$, учитывая $T_{-n}(x)=T_n(x)$, $\quad U_{-(n+2)}(x)=-U_n(x)$, получим

$$I_1^M+J_1^{M-1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}A(t)Z(t)\frac{T_{-M}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,U_{-M-1}(t)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\frac{T_{-M}(z)}{\sqrt{z^2-1}}\right)+\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,U_{-M-1}(z)\Big)=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\mathrm{X}(z)R_\infty^{(-M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)=\frac{1}{2}G_{-M}.$$

Чтобы вычислить далее $-I_2^N+J_2^{N-1}$ при $N=k-|\varkappa|+j+2$, снова воспользуемся (2.1.12), (2.1.13) и (2.1.9)

$$-I_2^N+J_2^{N-1}=\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\,\frac{T_N(z)}{\sqrt{z^2-1}}\right)-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,U_{N-1}(z)\Big)=-\frac{1}{2}G_N.$$

На основании вышеизложенного получаем (2.2.13). $\square$

Теорема 2.2.4. *Пусть на $[-1,\ 1]$ заданы две комплекснозначные функции $a(x)$ и $b(x)$, непрерывные по Гельдеру, причем $a^2(x)-b^2(x)\neq 0\ \forall x\in[-1,\ 1]$. Пусть далее $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения (1.1.6) с индексом $\varkappa<0$ класса $h(-1,\ 1)$.*

Тогда для $x \in (-1,\ 1)$ справедливы формулы

$$A(x)Z(x)\,T_{k-|\varkappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,T_{k-|\varkappa|}(t)\frac{dt}{t-x}=$$

$$=\delta_0^{(k)}U_0(x)+\cdots+\delta_k^{(k)}U_k(x),\quad k\geqslant|\varkappa|, \tag{2.2.15}$$

где

$$\begin{gathered}\delta_j^{(k)}=-G_{k-|\varkappa|+j+1}+\\ +\begin{cases}G_{k-|\varkappa|-j-1}+2\,H_{k-|\varkappa|-j-1}, & k-j>|\varkappa|+1,\\ H_0, & k-j=|\varkappa|+1,\quad j=\overline{0,\ k},\\ -G_{j+|\varkappa|+1-k}, & k-j\le|\varkappa|,\end{cases}\\ H_M=\sum_{r=0}^{[\frac{M}{2}]}a_r^{(M)}\,p_{M+2|\varkappa|+1-2r},\\ G_M=\sum_{r=1}^{|\varkappa|+1}d_r^{(M)}\,p_{2|\varkappa|-r+1}.\end{gathered} \tag{2.2.16}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_j(t)\,U_p(t)dt=\begin{cases}0, & j\neq p,\\ 0,5\,, & j=p,\end{cases}$$

и (1.1.1) из (2.2.15) имеем по аналогии с предыдущим

$$\frac{1}{2}\delta_j^{(k)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)T_{k-|\varkappa|}(t)U_j(t)dt+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)T_{k-|\varkappa|}(t)\,T_{j+1}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)U_{k-|\varkappa|+j}(t)dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)U_{k-|\varkappa|-j-2}(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)T_{k-|\varkappa|-j-1}(t)dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)T_{k-|\varkappa|+j+1}(t)dt=$$

$$=I_2^{k-|\varkappa|+j}-I_1^{k-|\varkappa|-j-2}+J_1^{k-|\varkappa|-j-1}+J_2^{k-|\varkappa|+j+1}.$$

При $a(x)\not\equiv 0$ для $M=k-|\varkappa|-j-1$, используя (2.1.14) , (2.1.13) и (2.1.10), получим, если $M>0$

$$J_1^M-I_1^{M-1}=-\frac{1}{2}\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,T_M(z)\Big)+\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,X(z)U_{M-1}(z)\right)\right]=H_M+\frac{1}{2}G_M,$$

где

$$H_M = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)T_M(z)\Big) = \sum_{r=0}^{[\frac{M}{2}]} a_r^{(M)} p_{M+2|\varkappa|+1-2r},$$

$$G_M = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} d_r^{(M)} p_{2|\varkappa|-r+1}.$$

Если же $M=0$, то

$$I_1^0 - J_1^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)dt = 0,5\,H_0.$$

Когда $M<0$, то

$$J_1^M - I_1^{M-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_{-M}(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)Z(t)U_{-M-1}(t)dt =$$

$$= -0,5\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)T_{-M}(z)\Big) + 0,5\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\sqrt{z^2-1}\,X(z)U_{-M-1}(z)\Big) = -0,5\;G_{-M}.$$

Аналогично при $M=k-|\varkappa|+j+1$ подсчитаем

$$J_2^M + I_2^{M-1} = -0,5\;G_M.$$

На основании вышеизложенного получаем (2.2.16). $\square$

2.2.2. Разложение оператора $K^0(x)$ по многочленам Чебышева первого рода

Теорема 2.2.5. *Пусть на $[-1,\ 1]$ заданы две комплекснозначные функции $a(x)$ и $b(x)$, непрерывные по Гельдеру, причем $a^2(x)-b^2(x)\neq 0\ \forall x\in[-1,1]$. Пусть далее $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения (1.1.6) с индексом $\varkappa\geqslant 0$ одного из классов: $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$ при $-0,5<\alpha$, $-0,5<\beta$.*

Тогда для $x\in(-1,\ 1)$ справедливы формулы

$$A(x)Z(x)\,T_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,T_{k+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \gamma_0^{(k)}T_0(x) + \cdots + \gamma_k^{(k)}T_k(x), \quad k\geqslant 0, \tag{2.2.17}$$

где

$$h_j\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0,5\,(q_1^{(k-j)} + q_1^{(k+j)}) + H_{k-j}, & \varkappa=0,\\ H_{k+\varkappa-j}, & \varkappa>0,\end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_N = \begin{cases} 0, & N = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{N-1+(1-\varkappa)\delta_\varkappa}{2}\right]} b_r^{(N-1)}\, p_{N-2r}, & N > 0, \end{cases}$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0, \\ 1, & \varkappa \geqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, T_j(t)\, T_p(t)dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ 0,5\,, & j = p \neq 0, \\ 1, & j = p = 0, \end{cases}$$

и (1.1.1) из (2.2.17) для $j = 0,\ 1,\ \cdots, k, \quad k \geqslant 0$, если положить $h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases}$ имеем

$$h_j \gamma_j^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, A(t)Z(t)T_{k+\varkappa}(t)\, T_j(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(\tau)Z(\tau)\, T_{k+\varkappa}(\tau) \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, T_j(t)\frac{dt}{\tau - t} \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, A(t)Z(t)\, T_{k+\varkappa}(t)\, T_j(t)dt - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(\tau)Z(\tau)\, T_{k+\varkappa}(\tau)\, U_{j-1}(\tau)d\tau.$$

Используя (2.2.1), получим

$$h_j \gamma_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, A(t)Z(t)T_{k+\varkappa+j}(t)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, A(t)Z(t)T_{k+\varkappa-j}(t)dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, U_{k+\varkappa-j-1}(t)dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)\, Z(t)\, U_{k+\varkappa+j-1}(t)dt =$$

$$= I_1^{k+\varkappa+j} + I_2^{k+\varkappa-j} + J_2^{k+\varkappa-j-1} - J_1^{k+\varkappa+j-1}.$$

Применяя (2.1.13), (2.1.14) и (2.1.10), вычислим при $a(x)\not\equiv 0$ для $M=k+\varkappa+j$

$$I_1^M - J_1^{M-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)\,U_{M-1}(z)\Big] - \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)\,R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right] + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)\,U_{M-1}(z)\Big]\right\}.$$

Учитывая разложение $X(z)$ (1.1.10), получим

$$I_1^M - J_1^{M-1} = -0,5\left\{\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)\,R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\right\} = \begin{cases} 0, & \varkappa>0,\\ 0,5\,q_1^{(k+j)}, & \varkappa=0.\end{cases}$$

Аналогично при $N=k+\varkappa-j\geqslant 0$

$$I_2^N + J_2^{N-1} = -\frac{1}{2}\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\frac{T_N(z)}{\sqrt{z^2-1}}\right) + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,U_{N-1}(z)\Big)\right] =$$

$$= \begin{cases} 0,5\,, & \varkappa=0,\quad N=0,\\ -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,U_{N-1}(z)\Big) - 0,5\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\,R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right), & \varkappa>0,\quad N\geqslant 0.\end{cases}$$

Обозначая

$$H_N = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,U_{N-1}(z)\Big) = \begin{cases} 0, & N=0,\\ \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{N-1+(1-\varkappa)\delta_\varkappa}{2}\right]} b_r^{(N-1)}\,p_{N-2r}, & N>0,\end{cases}$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa=0,\\ 1, & \varkappa\geqslant 1,\end{cases}$$

и учитывая, что $-0,5\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\,R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \begin{cases} 0, & \varkappa>0,\\ 0,5\,q_1^{(N)}, & \varkappa=0,\end{cases}$ окончательно получим утверждение теоремы. □

Теорема 2.2.6. *Пусть на $[-1,\ 1]$ заданы две комплекснозначные функции $a(x)$ и $b(x)$, непрерывные по Гельдеру, причем $a^2(x)-b^2(x)\neq 0\ \forall x\in[-1,1]$. Пусть далее $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения (1.1.6) с индексом $\varkappa\geqslant 0$ одного из классов: $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$ при $-0,5<\alpha$, $-0,5<\beta$.*

Тогда для $x\in(-1,\ 1)$ справедливы формулы

$$A(x)Z(x)\,U_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,U_{k+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \eta_0^{(k)}T_0(x) + \cdots + \eta_k^{(k)}T_k(x),\quad k\geqslant 0, \tag{2.2.18}$$

$$h_j\,\eta_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{[\frac{k-j}{2}]} r_l^{(k+\varkappa-j+1)} p_{k+\varkappa-j-2\,l}, \tag{2.2.19}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}]. \end{cases}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, T_j(t)\, T_p(t) dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ 0,5\,, & j = p \neq 0, \\ 1, & j = p = 0, \end{cases}$$

из (2.2.17) и (1.1.1) для $j = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ k, \quad k \geqslant 0$, если положить $h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases}$ имеем

$$h_j \eta_j^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, A(t) Z(t) U_{k+\varkappa}(t) T_j(t) dt +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(\tau) Z(\tau) U_{k+\varkappa}(\tau)\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, T_j(t) \frac{dt}{\tau - t}\Big) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} A(t) Z(t) U_{k+\varkappa}(t) T_j(t) dt -$$

$$- \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(\tau) Z(\tau) U_{k+\varkappa}(\tau) U_{j-1}(\tau) d\tau. \tag{2.2.20}$$

Используя (2.1.13), (2.1.14) и (2.1.12), равенство (2.2.20) представим так:

$$h_j \eta_j^{(k)} = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{X(z)}{\sqrt{z^2-1}} U_{k+\varkappa}(z)\, T_j(z)\right) + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z) U_{k+\varkappa}(z)\, U_{j-1}(z)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\sqrt{z^2-1}\, \frac{U_{k+\varkappa+j}(z) + U_{k+\varkappa-j}(z)}{z^2-1}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z) \frac{T_{k+\varkappa+j+1}(z) - T_{k+\varkappa-j+1}(z)}{z^2-1}\right) =$$

$$= J_1^{k+\varkappa+j} + J_2^{k+\varkappa-j} - I_1^{k+\varkappa+j+1} + I_2^{k+\varkappa-j+1}.$$

При $M = k + \varkappa + j + 1, \quad N = k + \varkappa - j + 1$, используя (2.1.11) ($M > 0,\ N > 0$), имеем

$$-I_1^M + J_1^{M-1} + I_2^N + J_2^{N-1} = \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{X(z)}{z^2-1}T_M(z)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\frac{X(z)}{z^2-1}\left(T_M(z) + R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{X(z)}{z^2-1}T_N(z)\right) - \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\frac{X(z)}{z^2-1}\left(T_N(z) + R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right] =$$

$$= -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{X(z)}{z^2-1}T_N(z)\right).$$

Поскольку при больших $|z|$

$$\frac{T_N(z)}{z^2-1} = \left(\sum_{l\geqslant 1}\frac{1}{z^{2l}}\right)\left(\sum_{m=0}^{[\frac{N}{2}]} a_m^{(N)} z^{N-2m}\right) = \sum_{l\geqslant 0} r_l^{(N)} z^{N-2l-2},$$

$$r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}], \end{cases}$$

значит

$$h_j \eta_j^{(k)} = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\frac{T_N(z)}{z^2-1}\right) = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\left(\sum_{q\geqslant 0}\frac{p_{\varkappa+q}}{z^{\varkappa+q}}\right)\left(\sum_{l\geqslant 0} r_l^{(N)} z^{N-2l-2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{[\frac{N-1-\varkappa}{2}]} r_l^{(N)} p_{N-2l-1}.$$

Окончательно получаем (2.2.19). □

Теорема 2.2.7. *Пусть на* $[-1,\ 1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$*, непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x) - b^2(x) \neq 0\ \forall x \in [-1, 1]$*. Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.6) *с индексом* $\varkappa < 0$ *класса* $h(-1,\ 1)$*.*

Тогда для $x \in (-1,\ 1)$ *справедливы формулы*

$$A(x)Z(x)\,U_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)U_{k-|\varkappa|}(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \beta_0^{(k)} T_0(x) + \beta_1^{(k)} T_1(x) + \ldots + \beta_k^{(k)} T_k(x), \quad k \geqslant |\varkappa|, \tag{2.2.21}$$

где

$$\frac{\beta_j^{(k)}}{h_j} = \begin{cases} 1, & j = k,\ \varkappa = -1, \\ G_{k-j}, & k \geqslant j+1,\ \varkappa = -1, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} + H_{k-|\varkappa|-j+1} + G_{k-|\varkappa|-j+1}, & k-|\varkappa|-j \geqslant 0,\ |\varkappa| \geqslant 2, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} + \dfrac{1}{2}G_0, & k-|\varkappa|-j = -1,\ |\varkappa| \geqslant 2, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} - H_{|\varkappa|-k+j-1}, & k-|\varkappa|-j < -1,\ |\varkappa| \geqslant 2, \end{cases} \tag{2.2.22}$$

$$h_j = \begin{cases} 2, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$\begin{aligned} H_N &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=0}^{|\varkappa|-2} p_{|\varkappa|+m} s_{|\varkappa|-m+1}^{(N)}, & \varkappa \geqslant 2, \\ 0, & \varkappa = -1, \end{cases} \\ s_l^{(N)} &= \sum_{p=[l/2]-1}^{l-3} d_{4-l+2p}^{(N)}, \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

$$\begin{aligned} G_M &= \sum_{l=0}^{\left[\frac{M+|\varkappa|-1}{2}\right]} p_{M+2|\varkappa|-1-2l}\, r_l^{(M)}, \\ r_l^{(M)} &= \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(M)}, & l < \left[\frac{M}{2}\right], \\ 1 & l \geqslant \left[\frac{M}{2}\right]. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство формулы (2.2.22) проводится аналогично. Из (2.2.21), учитывая (2.2.1), имеем

$$\frac{\beta_j^{(k)}}{h_j} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} A(t)Z(t)\,T_j(t)\,U_{k-|\varkappa|}(t)dt - \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(\tau)Z(\tau)\,U_{j-1}(\tau)\,U_{k-|\varkappa|}(\tau)d\tau$$

или

$$\frac{\beta_j^{(k)}}{h_j} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} A(t)Z(t)\,U_{k-|\varkappa|-j}(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} A(t)Z(t)\,U_{k-|\varkappa|+j}(t)dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\frac{T_{k-|\varkappa|-j+1}(t)}{1-t^2}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\frac{T_{k-|\varkappa|+j+1}(t)}{1-t^2}dt =$$

$$= I_1^{k-|\varkappa|-j} + I_2^{k-|\varkappa|+j} - J_1^{k-|\varkappa|-j+1} + J_2^{k-|\varkappa|+j+1}. \tag{2.2.25}$$

Подобно предыдущему, при $a(x) \not\equiv 0$, используя (1.1.11) и учитывая, что,

$$R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\sum_{k\geqslant 1} d_1^{(N)} z^{-k}\right)\left(\sum_{k\geqslant 1} z^{-2k}\right) = \sum_{k\geqslant 3} s_k^{(N)} z^{-k},$$

$$s_l^{(N)} = \sum_{p=[l/2]-1}^{l-3} d_{4-l+2p}^{(N)},$$

получим

$$I_2^{k-|\varkappa|+j} + J_2^{k-|\varkappa|+j+1} = H_{k-|\varkappa|+j+1}$$

и

$$I_1^{k-|\varkappa|-j} - J_1^{k-|\varkappa|-j+1} = G_{k-j-|\varkappa|+1} + H_{k-j-|\varkappa|+1}.$$

Учитывая (2.2.23) и (2.2.24) дальнейшее очевидно. □

В частности, если $a(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv 1$, то в классе $h(-1,\ 1)$

$$X(z) = \sqrt{z^2-1},\ B(x) \equiv -1,\ Z(x) = i\sqrt{1-x^2},\ \varkappa = -1.$$

В соответствии с (2.2.25) имеем

$$h_j \beta_j^{(k)} = -\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{T_{k-j}(z)}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{T_{k+j}(z)}{\sqrt{z^2-1}} = \begin{cases} 0,5\,, & j = k \neq 0, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

что совпадает с (1.1.1).

Теорема 2.2.8. *Пусть на $[-1,\ 1]$ заданы две комплекснозначные функции $a(x)$ и $b(x)$, непрерывные по Гельдеру, причем $a^2(x) - b^2(x) \neq 0\ \forall x \in [-1,1]$. Пусть далее $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения (1.1.6) с индексом $\varkappa < 0$ класса $h(-1,\ 1)$.*

Тогда для $x \in (-1,\ 1)$ справедливы формулы

$$A(x)Z(x)\,T_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,T_{k-|\varkappa|}(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \mu_0^{(k)} T_0(x) + \dots + \mu_k^{(k)} T_k(x), \quad k \geqslant |\varkappa|, \tag{2.2.26}$$

где

$$h_j\,\mu_j^{(k)} = 0,5\,G_{k-|\varkappa|+j} + \begin{cases} 0,5\ G_{k-|\varkappa|-j} + H_{k-|\varkappa|-j}, & k-j > |\varkappa|, \\ 0,5\,G_0, & k-j = |\varkappa|, \\ 0,5\,G_{-k+|\varkappa|+j}, & k-j < |\varkappa|, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{[\frac{M-1}{2}]} b_r^{(M-1)}\, p_{M+2|\varkappa|-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} q_r^{(M)}\, p_{2|\varkappa|-r+1}.$$

Доказательство. Подобно предыдущему из (2.2.26) и (1.1.1) имеем

$$h_j\, \mu_j^{(k)} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{A(t)Z(t)}{\sqrt{1-t^2}}T_{k-|\varkappa|}(t)\,T_j(t)dt+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(\tau)Z(\tau)\,T_{k-|\varkappa|}(\tau)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{dt}{\tau-t}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{A(t)Z(t)}{\sqrt{1-t^2}}T_{k-|\varkappa|}(t)\,T_j(t)dt-\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,T_{k-|\varkappa|}(t)\,U_{j-1}(t)dt,$$

$$0\leqslant j\leqslant k,\qquad k\geqslant|\varkappa|.$$

Используя (2.2.1), получим

$$h_j\mu_j^{(k)}=I_1^{k-|\varkappa|+j}-J_1^{k-|\varkappa|+j-1}+I_2^{k-|\varkappa|-j}+J_2^{k-|\varkappa|-j-1}.$$

При $a(x)\not\equiv 0$ и $M=k-|\varkappa|+j$ с учетом разложения функции $X(z)$ в ряд (1.1.10), а также (2.1.13), (2.1.14) и (2.1.10), для $M>0$ вычислим

$$I_1^M-J_1^{M-1}=\frac{1}{2}\Big\{-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)U_{M-1}(z)\Big]-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]+$$

$$+\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)\,U_{M-1}(z)\Big]\Big\}=-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)\,R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]=\frac{1}{2}\,G_M,$$

$$G_M=-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{r=1}^{|\varkappa|+1}q_r^{(M)}p_{2|\varkappa|-r+1}.$$

При $M=0$ имеем

$$I_1^0-J_1^{-1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}A(t)Z(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-0,5\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)\,R_\infty^{(0)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]=0,5\;G_0.$$

Вычисляя $I_2^N+J_2^{N-1}$ при $N=k-|\varkappa|-j$, снова воспользуемся формулами (2.1.13), (2.1.14) и (2.1.10). Для $k-|\varkappa|>j$ получим

$$I_2^N+J_2^{N-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)U_{N-1}(z)\Big]-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[X(z)R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)\,U_{N-1}(z)\Big]\right\}=$$

$$=H_N+\frac{1}{2}\,G_N,$$

$$H_M=-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)\,U_{M-1}(z)\Big]=\sum_{r=0}^{[\frac{M-1}{2}]}b_r^{(M-1)}\,p_{M+2|\varkappa|-2r},\qquad M>0.$$

Если же $k - |\varkappa| = j$, то

$$I_2^0 - J_2^{-1} = 0,5\ G_0.$$

При $k - |\varkappa| < j$, получаем

$$I_2^N + J_2^{N-1} = I_2^{-N} + J_2^{-N-1} = 0,5\ G_{-N}.$$

Следовательно, утверждение теоремы верно. $\square$

При выводе формул (2.2.17) и (2.2.18) существенно используется принадлежность функции $Z(x)$ к определенному классу функций. Следующее замечание снимает названные ограничения.

Замечание 2.2.1. *Не представляет трудностей получение связи между коэффициентами* $\gamma_j^{(k)}$, *и* $\alpha_j^{(k)}$, $\rho_j^{(k)}$ *и* $\eta_j^{(k)}$, $j = 0,\ 1,\ \dots,\ k$.

Действительно, если учесть представление [30]

$$U_n(x) = 2 \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}^{0}\, T_{n-2j}(x),$$

(в сумме σ^0 каждое слагаемое, содержащее $T_0(x)$, делится пополам) и подставить в (2.2.2), а затем собрать коэффициенты при многочленах $T_j(x)$, $j = \overline{0,\ k}$, то получим

$$\gamma_0^{(k)} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \alpha_{2r}^{(k)},$$

$$\gamma_{2q+1}^{(k)} = 2 \sum_{r=q}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \alpha_{2r+1}^{(k)}, \qquad q = \overline{0,\ \left[\frac{k-1}{2}\right]},$$

$$\gamma_{2q}^{(k)} = 2 \sum_{r=q}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \alpha_{2r}^{(k)}, \qquad q = \overline{1,\ \left[\frac{k}{2}\right]}.$$

Аналогично на основании (2.2.8)

$$\eta_0^{(k)} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \rho_{2r}^{(k)},$$

$$\eta_{2q+1}^{(k)} = 2 \sum_{r=q}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \rho_{2r+1}^{(k)}, \qquad q = \overline{0,\ \left[\frac{k-1}{2}\right]},$$

$$\eta_{2q}^{(k)} = 2 \sum_{r=q}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \rho_{2r}^{(k)}, \qquad q = \overline{1,\ \left[\frac{k}{2}\right]}.$$

2.3. Приближенное решение характеристического уравнения с произвольными коэффициентами

При построении приближенного решения характеристического уравнения

$$A(x)Z(x)\,u(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,u(t)\frac{dt}{t-x} = f(x), \quad -1 < x < 1 \tag{2.3.1}$$

применим полученные разложения характеристического оператора по многочленам Чебышева

Для этого приведем вначале интерполяционные многочлены по узлам Чебышева первого рода, основываясь на результате теоремы 7.9 из [30].

Имеет место

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j\, T_j(x), \tag{2.3.2}$$

где

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k),\\
f_j &= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)\,T_j(x_k), \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,\\
x_k &= \cos\frac{2k-1}{2n+2}\,\pi, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n+1.
\end{aligned}$$

Если же здесь применить тождества [30]:

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = U_0(x),\\
&2\,T_1(x) = U_1(x),\\
&2\,T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \qquad j \geqslant 2,
\end{aligned}$$

получим следующее:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j\, U_j(x), \tag{2.3.3}$$

где

$$\begin{aligned}
f_j &= G_j - \delta_j\, G_{j+2},\\
G_j &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)\,T_j(x_k),\\
\delta_j &= \begin{cases} 1, & j = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-2,\\ 0, & j = n-1,\ n,\end{cases}\\
x_k &= \cos\frac{2k-1}{2n+2}\,\pi, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots, n+1.
\end{aligned}$$

2.3.1. Решение характеристического уравнения в классах $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$

Приближенное решение задачи (2.3.1), (2.1.3) найдем как решение задачи

$$A(x)Z(x)\,u_{n+\varkappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,u_{n+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x}=f_n(x),\quad -1<x<1, \tag{2.3.4}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,u_{n+\varkappa}(t)\,t^{j-1}dt=\alpha_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa, \tag{2.3.5}$$

где $f_n(x)$ – некоторый интерполяционный многочлен.

Так как решением задачи (2.3.4), (2.3.5) является алгебраический многочлен степени не выше $n+\varkappa$, будем искать его в виде линейной комбинации многочленов Чебышева. Получим следующие схемы.

Схема 2.3.1. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\varkappa}c_k\,U_k(x), \tag{2.3.6}$$

c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.6) в (2.3.4), получаем при $-1<x<1$

$$\sum_{k=0}^{n}c_{k+\varkappa}\left[A(x)Z(x)\,U_{k+\varkappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,U_{k+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x}\right]=f_n(x). \tag{2.3.7}$$

Учитывая (2.2.8), из (2.3.7) находим при $-1<x<1$

$$\sum_{k=0}^{n}c_{k+\varkappa}\left[\rho_0^{(k)}U_0(x)+\rho_1^{(k)}U_1(x)+\cdots+\rho_k^{(k)}U_k(x)\right]=\sum_{j=0}^{n}f_j\,U_j(x).$$

Отсюда для определения $c_\varkappa,\ c_{\varkappa+1},\ \ldots\ ,\ c_{\varkappa+n}$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n}\rho_j^{(k)}c_{k+\varkappa}=f_j,\quad j=n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0. \tag{2.3.8}$$

Недостающие неизвестные $c_{\varkappa-1},c_{\varkappa-2},\ \ldots\ ,\ c_0$ определим из равенств (2.3.5) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa}c_k\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,U_k(t)\,t^{j-1}dt\right]=-\sum_{k=0}^{n+\varkappa}c_k\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,U_k(z)z^{j-1}\Big)\right]=\alpha_j,$$

$$j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa.$$

Учитывая (2.1.8), будем иметь систему

$$\sum_{k=\varkappa-j}^{n+\varkappa} c_k\, I_{kj} = \alpha_j, \quad j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa, \qquad I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\varkappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} b_m^{(k)}. \tag{2.3.9}$$

Решение системы (2.3.8), (2.3.9) определяется формулами

$$c_{n+\varkappa} = \frac{f_n}{\rho_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\varkappa-l} = \frac{1}{\rho_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\varkappa-l+j}\, \rho_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n,$$

$$c_{\varkappa-j} = \frac{1}{I_{\varkappa-j,j}} \left[\alpha_j - \sum_{k=\varkappa-j+1}^{n+\varkappa} c_k\, I_{kj} \right], \qquad j = \overline{1,\ \varkappa},$$

где

$$\rho_j^{(k)} = \begin{cases} 2H_{k+\varkappa-j}, & \varkappa > 0, \\ 2H_{k-j} + q_1^{(k-j)}, & \varkappa = 0, \end{cases}$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$H_M = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0}^{\left[\frac{(M-1+(1-\varkappa)\delta_\varkappa)}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0, \\ 0, & M = 0, \end{cases}$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0, \\ 1, & \varkappa \geqslant 1. \end{cases}$$

Схема 2.3.2. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, T_k(x), \tag{2.3.10}$$

где c_k – числа, подлежащие определению. Подставляя (2.3.10) в (2.3.4), получаем при $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[A(x) Z(x)\, T_k(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B(t) Z(t)\, T_k(t) \frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa} \left[A(x) Z(x)\, T_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B(t) Z(t)\, T_{k+\varkappa}(t) \frac{dt}{t-x} \right] = f_n(x). \tag{2.3.11}$$

Учитывая (2.2.17), из (2.3.11) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa}\left[\gamma_0^{(k)}T_0(x)+\gamma_1^{(k)}T_1(x)+\dots+\gamma_k^{(k)}T_k(x)\right]=\sum_{j=0}^{n} f_j\,T_j(x),\ -1<x<1.$$

Отсюда для определения $c_\varkappa,\ c_{\varkappa+1},\ \dots\ ,\ c_{\varkappa+n}$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n}\gamma_j^{(k)}c_{k+\varkappa}=f_j,\qquad j=n,\ n-1,\ \dots\ ,\ 0. \tag{2.3.12}$$

Недостающие неизвестные $c_{\varkappa-1},\ c_{\varkappa-2},\ \dots\ ,\ c_0$ определим из равенств (2.3.5) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,T_k(t)\,t^{j-1}dt\right]=-\sum_{k=0}^{n+\varkappa}c_k\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,T_k(z)z^{j-1}\Big)\right]=\alpha_j,$$

$$j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa.$$

Учитывая (2.1.7), будем иметь систему

$$\sum_{k=\varkappa-j}^{n+\varkappa}c_k\,I_{kj}=\alpha_j,\quad j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa,\qquad I_{kj}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\varkappa+j}{2}\right]}p_{k+j-2m}\,a_m^{(k)}. \tag{2.3.13}$$

Решение системы (2.3.12), (2.3.13) определяется формулами

$$c_{n+\varkappa}=\frac{f_n}{\gamma_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\varkappa-l}=\frac{1}{\gamma_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l}-\sum_{j=1}^{l}c_{n+\varkappa-l+j}\gamma_{n-l}^{(n-l+j)}\right],$$

$$l=1,\ 2,\ \dots\ ,\ n,$$

$$c_{\varkappa-j}=\frac{1}{I_{\varkappa-j,j}}\left[\alpha_j-\sum_{k=\varkappa-j+1}^{n+\varkappa}c_k\,I_{kj}\right],$$

$$j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa,$$

где

$$h_j\gamma_j^{(k)}=\begin{cases}0,5\,(q_1^{(k-j)}+q_1^{(k+j)})+H_{k-j}, & \varkappa=0,\\ H_{k+\varkappa-j}, & \varkappa>0,\end{cases}$$

$$h_j=\begin{cases}0,5\,, & j\neq 0,\\ 1, & j=0,\end{cases}$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$H_N = \begin{cases} 0, & N = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{N-1+(1-\varkappa)\delta_\varkappa}{2}\right]} b_r^{(N-1)}\, p_{N-2r}, & N > 0, \end{cases}$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0, \\ 1, & \varkappa \geqslant 1. \end{cases}$$

Схема 2.3.3. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, U_k(x), \tag{2.3.14}$$

где c_k – числа, подлежащие определению. Подставляя (2.3.14) в (2.3.4), получаем при $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[A(x)Z(x)\, U_k(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, U_k(t) \frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa} \left[A(x)Z(x)\, U_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, U_{k+\varkappa}(t) \frac{dt}{t-x} \right] = f_n(x). \tag{2.3.15}$$

Учитывая (2.2.18), из (2.3.15) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa} \left[\eta_0^{(k)} T_0(x) + \eta_1^{(k)} T_1(x) + \dots + \eta_k^{(k)} T_k(x) \right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\, T_j(x), \ -1 < x < 1.$$

Отсюда для определения $c_\varkappa,\ c_{\varkappa+1},\ \dots\ ,\ c_{\varkappa+n}$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \eta_j^{(k)} c_{k+\varkappa} = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \dots\ ,\ 0. \tag{2.3.16}$$

Недостающие неизвестные $c_{\varkappa-1},\ c_{\varkappa-2},\ \dots\ ,\ c_0$ определим из равенств (2.3.5) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, U_k(t)\, t^{j-1} dt \right] = -\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(X(z)\, U_k(z) z^{j-1} \right) \right] = \alpha_j,$$

$$j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa.$$

Учитывая (2.1.8), отсюда будем иметь систему

$$\sum_{k=\varkappa-j}^{n+\varkappa} c_k\, I_{kj} = \alpha_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa, \qquad I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\varkappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} b_m^{(k)}. \tag{2.3.17}$$

Решение системы (2.3.16), (2.3.17) определяется формулами:

$$c_{n+\varkappa} = \frac{f_n}{\eta_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\varkappa-l} = \frac{1}{\eta_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\varkappa-l+j}\eta_{n-l}^{(n-l+j)}\right], \quad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,$$

$$c_{\varkappa-j} = \frac{1}{I_{\varkappa-j,j}}\left[\alpha_j - \sum_{k=\varkappa-j+1}^{n+\varkappa} c_k\, I_{kj}\right], \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa,$$

где

$$h_j\eta_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-j}{2}\right]} r_l^{(k+\varkappa-j+1)} p_{k+\varkappa-j-2l},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases}$$

$$r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}]. \end{cases}$$

Схема 2.3.4. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, T_k(x), \tag{2.3.18}$$

где c_k – числа, подлежащие определению. Подставляя (7.1.1) в (2.3.4), получаем при $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[A(x)Z(x)\, T_k(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, T_k(t)\frac{dt}{t-x}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa}\left[A(x)Z(x)\, T_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, T_{k+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x}\right] = f_n(x). \tag{2.3.19}$$

Учитывая (2.2.2), из (2.3.19) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa}\left[\alpha_0^{(k)} U_0(x) + \alpha_1^{(k)} U_1(x) + \cdots + \alpha_k^{(k)} U_k(x)\right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\, U_j(x),\ -1 < x < 1.$$

Отсюда для определения $c_{\varkappa},\ c_{\varkappa+1},\ \ldots\ ,\ c_{\varkappa+n}$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \alpha_j^{(k)} c_{k+\varkappa} = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0. \tag{2.3.20}$$

Недостающие неизвестные $c_{\varkappa-1},\ c_{\varkappa-2},\ \ldots\ ,\ c_0$ определим из равенств (2.3.5) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,T_k(t)\,t^{j-1}dt\right] = -\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\,T_k(z)z^{j-1}\right)\right] = \alpha_j,$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa.$$

Учитывая (2.1.7), отсюда будем иметь систему

$$\sum_{k=\varkappa-j}^{n+\varkappa} c_k\, I_{kj} = \alpha_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa, \qquad I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\varkappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m}\, a_m^{(k)}. \tag{2.3.21}$$

Решение системы (2.3.20), (2.3.21) определяется формулами

$$c_{n+\varkappa} = \frac{f_n}{\alpha_n^{(n)}},$$
$$c_{n+\varkappa-l} = \frac{1}{\alpha_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\varkappa-l+j}\alpha_{n-l}^{(n-l+j)}\right], \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,$$
$$c_{\varkappa-j} = \frac{1}{I_{\varkappa-j,j}}\left[\alpha_j - \sum_{k=\varkappa-j+1}^{n+\varkappa} c_k\, I_{kj}\right], \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa,$$

где

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k = 0, \varkappa = 0, \\ 0,5\,, & j = k \neq 0,\ \varkappa = 0, \\ p_{\varkappa+1}, & j = k-1,\ \varkappa = 0, \\ 1, & j = k, \varkappa = 1, \\ 2H_{k-j-1} + d_1^{(k-j-1)}, & k-j-2 \geqslant 0,\ \varkappa = 0, \\ 2H_{k+\varkappa-j-1}, & k+\varkappa-j-2 \geqslant 0,\ \varkappa > 0, \end{cases}$$

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M+(1-\varkappa)\delta_\varkappa}{2}\right]} a_r^{(M)} p_{M+1-2r}, \qquad M \geqslant \delta_\varkappa(\varkappa-1),$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0, \\ 1, & \varkappa \geqslant 1. \end{cases}$$

2.3.2. Решение характеристического уравнения в классе $h(-1,\ 1)$

Пусть решение уравнения (2.3.1) ищется в классе $h(-1,\ 1)$, $\varkappa < 0$ и выполняются необходимые и достаточные условия разрешимости

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}\,f(t)\,t^{j-1}dt = 0, \quad j=\overline{1,\ |\varkappa|}.$$

Приближенное решение в этом случае найдем из уравнения при $|x|<1$

$$A(x)Z(x)\,u_{n-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,u_{n-|\varkappa|}(t)\frac{dt}{t-x} = f_n(x) + Q_{|\varkappa|-1}(x), \qquad (2.3.22)$$

где $f_n(x)$ – некоторый интерполяционный многочлен, $Q_{|\varkappa|-1}(x)$ – некоторый вспомогательный многочлен, позволяющий обеспечить условие разрешимости уравнения (2.3.22).

Коэффициенты $q_0,\ q_1,\ \ldots\ ,\ q_{|\varkappa|-1}$ вспомогательного многочлена $Q_{|\varkappa|-1}(x)$ здесь и далее определяются из условий разрешимости уравнения (2.3.22):

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}\Big[f_n(t) + Q_{|\varkappa|-1}(t)\Big]t^{j-1}dt = 0, \quad j=\overline{1,\ |\varkappa|}.$$

Интегралы, входящие в левые части последних равенств, вычисляются по формуле

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}\Big[f_n(t) + Q_{|\varkappa|-1}(t)\Big]t^{j-1}dt = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X^{-1}(z)\Big(f_n(z) + Q_{|\varkappa|-1}(z)\Big)z^{j-1}\Big].$$

По аналогии с предыдущим построим вычислительные схемы и в этом классе функций.

Схема 2.3.5. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $Q_{|\varkappa|-1}(x) = \sum\limits_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m U_m(x)$, $u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|}U_{k-|\varkappa|}(x), \qquad (2.3.23)$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.23) в (2.3.22), с учетом формулы (2.2.12) получаем

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|}\left[A(x)Z(x)\,U_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,U_{k-|\varkappa|}(t)\frac{dt}{t-x}\right] =$$

$$= \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[\sigma_0^{(k)} U_0(x) + \sigma_1^{(k)} U_1(x) + \ldots + \sigma_k^{(k)} U_k(x)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j\, U_j(x) + \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m U_m(x). \tag{2.3.24}$$

От (2.3.24) придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \sigma_j^{(k)} c_{k-|\varkappa|} = f_j, \quad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|\,, \tag{2.3.25}$$

где

$$\sigma_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+2} + \begin{cases} G_0, & j = k-|\varkappa|, \\ G_{j-k+|\varkappa|}, & j > k-|\varkappa|, \\ 2H_{k-|\varkappa|-j} + G_{k-|\varkappa|-j}, & j < k-|\varkappa|, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M+2|\varkappa|-2r}, \qquad M > 0,$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} q_r^{(M)} p_{2|\varkappa|-r+1},$$

числа $q_r^{(M)}$ определены в (2.1.9).

Из системы (2.3.25) обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|}, c_{n-|\varkappa|-1},\ \ldots\ ,\ c_0.$

Заметим, что здесь и далее не все уравнения, вытекающие из (2.3.24), используются для нахождения c_j.

Схема 2.3.6. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.2),

$$Q_{|\varkappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m T_m(x),$$

$u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} T_{k-|\varkappa|}(x), \tag{2.3.26}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.26) в (2.3.22), с учетом формулы (2.2.26) получаем

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[A(x)Z(x)\,T_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,T_{k-|\varkappa|}(t)\frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[\mu_0^{(k)} T_0(x) + \mu_1^{(k)} T_1(x) + \ldots + \mu_k^{(k)} T_k(x) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j \, T_j(x) + \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m T_m(x). \tag{2.3.27}$$

От (2.3.27) придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \mu_j^{(k)} c_{k-|\varkappa|} = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|, \tag{2.3.28}$$

где

$$h_j \, \mu_j^{(k)} = \frac{1}{2} G_{k-|\varkappa|+j} + \begin{cases} 0,5\ G_{k-|\varkappa|-j} + H_{k-|\varkappa|-j}, & k-j > |\varkappa|, \\ 0,5\, G_0, & k-j = |\varkappa|, \\ 0,5\, G_{-k+|\varkappa|+j}, & k-j < |\varkappa|, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} \, p_{M+2|\varkappa|-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} q_r^{(M)} \, p_{2|\varkappa|-r+1},$$

числа $q_r^{(M)}$ определены в (2.1.9).

Из системы (2.3.28) обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|},\ c_{n-|\varkappa|-1},\ \ldots\ ,\ c_0$.

Схема 2.3.7. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.3),

$$Q_{|\varkappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m U_m(x),$$

$u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} T_{k-|\varkappa|}(x), \tag{2.3.29}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.29) в (2.3.22), с учетом формулы (2.2.15) получаем

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[A(x) Z(x) \, T_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B(t) Z(t) \, T_{k-|\varkappa|}(t) \frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[\delta_0^{(k)} U_0(x) + \delta_1^{(k)} U_1(x) + \ldots + \delta_k^{(k)} U_k(x) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j\, U_j(x) + \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m U_m(x). \qquad (2.3.30)$$

От (2.3.30) придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \delta_j^{(k)} c_{k-|\varkappa|} = f_j, \quad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|\,, \qquad (2.3.31)$$

где

$$\delta_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+1} + \begin{cases} G_{k-|\varkappa|-j-1} + 2\,H_{k-|\varkappa|-j-1}, & k-j > |\varkappa|+1, \\ H_0, & k-j = |\varkappa|+1, \\ -G_{j+|\varkappa|+1-k}, & k-j \le |\varkappa|, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} a_r^{(M)}\, p_{M+2|\varkappa|+1-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} d_r^{(M)}\, p_{2|\varkappa|-r+1},$$

числа $d_r^{(M)}$ определены в (2.1.11).

Из системы (2.3.31) обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|},\ c_{n-|\varkappa|-1},\ \ldots\ ,\ c_0$.

Схема 2.3.8. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.2),

$$Q_{|\varkappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m T_m(x),$$

$u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} U_{k-|\varkappa|}(x), \qquad (2.3.32)$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.32) в (2.3.22), с учетом формулы (2.2.21) получаем

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[A(x)Z(x)\, U_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, U_{k-|\varkappa|}(t) \frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[\beta_0^{(k)} T_0(x) + \beta_1^{(k)} T_1(x) + \ldots + \beta_k^{(k)} T_k(x) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j\, T_j(x) + \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m T_m(x). \qquad (2.3.33)$$

От (2.3.33) придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \beta_j^{(k)} c_{k-|\varkappa|} = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \dots\ ,\ |\varkappa|\,, \qquad (2.3.34)$$

где

$$\beta_j^{(k)} = h_j \begin{cases} 0,5\,, & j = k,\ \varkappa = -1, \\ G_{k-j}, & k \geqslant j+1,\ \varkappa = -1, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} + H_{k-|\varkappa|-j+1} + G_{k-|\varkappa|-j+1}, & k-|\varkappa|-j \geqslant 0,\ |\varkappa| \geqslant 2, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} + \dfrac{1}{2} G_0, & k-|\varkappa|-j = -1,\ |\varkappa| \geqslant 2, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} - H_{|\varkappa|-k+j-1}, & k-|\varkappa|-j < -1,\ |\varkappa| \geqslant 2, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 2, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_N = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{m=0}^{|\varkappa|-2} p_{|\varkappa|+m} s_{|\varkappa|-m+1}^{(N)}, & \varkappa \geqslant 2, \\ 0, & \varkappa = -1, \end{cases}$$

$$s_l^{(N)} = \sum_{p=[l/2]-1}^{l-3} d_{4-l+2p}^{(N)},$$

$$G_M = \sum_{l=0}^{\left[\frac{M+|\varkappa|-1}{2}\right]} p_{M+2|\varkappa|-1-2l} r_l^{(M)},$$

$$r_l^{(M)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{l} a_m^{(M)}, & l < \left[\frac{M}{2}\right], \\ 1 & l \geqslant \left[\frac{M}{2}\right], \end{cases}$$

числа $d_r^{(M)}$ определены в (2.1.11).

Из системы (2.3.34) обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|},\ c_{n-|\varkappa|-1},\ \dots\ ,\ c_0.$

Обоснование вычислительных схем

Приведем теоремы, характеризующие порядки погрешностей построенных приближенных решений (2.3.6), (2.3.10), (2.3.14), (7.1.1), (2.3.23), (2.3.26), (2.3.29), (2.3.32).

С этой целью введем класс функций $W^r H^\mu,\ r \geqslant 0,\ 0 < \mu \leqslant 1$.

Мы говорим, что функция $f(x) \in W^r H^\mu,\ x \in [-1,\ 1]$, если она имеет производные до порядка r включительно и r-я производная принадлежит классу Гельдера $H(\mu)$:

$$\left| f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2) \right| \leqslant K\, |x_1 - x_2|^\mu \qquad \forall x_1, x_2 \in [-1, 1],$$

где K и μ константы, не зависящие от выбора точек x_1, x_2.

Теорема 2.3.1. *Пусть функции $a(x)$, $b(x)$, входящие в уравнение (1.1.7), принадлежат классу $H(\mu)$, $0 < \mu \leqslant 1$, функция $f(x)$, являющаяся правой частью этого уравнения, принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. Пусть далее $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (2.3.2) или (2.3.3) по узлам Чебышева первого рода, $u(x)$, $u_{n+\varkappa}(x)$ означают соответственно точное и приближенное решения задач (2.3.1), (2.1.3), (2.3.4), (2.3.5).*

Тогда

$$\|u(x) - u_{n+\varkappa}(x)\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}. \tag{2.3.35}$$

Здесь и далее через M обозначаются константы, вообще говоря различные, не зависящие от n.

Доказательство. Поскольку для $-1 < x < 1$ имеем

$$u(x) - u_{n+\varkappa}(x) = \frac{a(x)}{Z(x)}\Big(f(x) - f_n(x)\Big) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{b(t)}{Z(t)} \frac{f(t) - f_n(x)}{t - x} dt, \tag{2.3.36}$$

то, учитывая неравенство [30]

$$\|f(x) - f_n(x)\|_\infty \leqslant M \frac{\ln n}{n^{r+\mu}}, \tag{2.3.37}$$

а также оценки, приведенные в [55] для сингулярного интеграла, приходим к оценке (2.3.35). □

По аналогии можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1 и функции $u(x)$, $u_{n-|\varkappa|}(x)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (2.3.1), (2.3.22). Тогда*

$$\Big\|Z(x)\Big[u(x) - u_{n-|\varkappa|}(x)\Big]\Big\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}.$$

В рассматриваемом случае интеграл, входящий в правую часть (2.3.36), может допускать интегрируемую особенность. Учитывая это, приходится оценивать произведение

$$Z(x)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{b(t)}{Z(t)} \frac{f(t) - f_n(x)}{t - x} dt, \quad -1 < x < 1.$$

На основании [55] с учетом неравенства (2.3.37), имеющего место для многочлена $f_n(x)$, приходим к оценке

$$\left\|Z(x)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{b(t)}{Z(t)} \frac{f(t) - f_n(x)}{t - x} dt\right\|_C \leqslant M \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}.$$

Дальнейшее очевидно.

2.4. Приближенное решение полного сингулярного интегрального уравнения с произвольными коэффициентами

Построим теперь приближенное решение полного сингулярного интегрального уравнения (1.1.4), используя полученные алгоритмы для приближенного решения характеристического уравнения.

Укажем, как и в случае характеристического уравнения, несколько разных алгоритмов.

Предварительно рассмотрим два следующих способа интерполирования функций двух переменных, полученных из формул (2.3.2), (2.3.3):

$$
\begin{aligned}
k_{n,n}(x,\,t) &= \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} T_j(t),\\
\sigma_{mj} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) k(x_l,\,x_r),\\
\delta_i &= \begin{cases} 1, & i=0,\\ 2 & i>0,\end{cases}\\
x_k &= \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\\
&\qquad k = 1,\,2,\,\ldots\,,\,n+1,
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

и

$$
\begin{aligned}
k_{n,n}(x,\,t) &= \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} T_j(t),\\
\sigma_{mj} &= \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} \Big(T_m(x_l) - \nu_m T_{m+2}(x_l)\Big) k(x_l,\,x_r),\\
\delta_j &= \begin{cases} 1, & j=0,\\ 2, & j>0,\end{cases}\\
\nu_m &= \begin{cases} 1, & 0 \leqslant m \leqslant n-2,\\ 0 & m = n-1,\ n,\end{cases}\\
x_k &= \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\\
&\qquad k = 1,\,2,\,\ldots\,,\,n+1,
\end{aligned}
\tag{2.4.2}
$$

которые далее будем использовать при построении вычислительных схем.

2.4.1. Решение полного уравнения в классах $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$

Пусть индекс $\varkappa$ характеристического оператора K^0 неотрицателен. Приближенное решение задачи (2.1.5) найдем как решение задачи

$$\begin{gathered} K^0(u_{n+\varkappa}(x);\ x) + k(u_{n+\varkappa}(x);\ x) = f_n(x), \quad -1 < x < 1, \\ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, u_{n+\varkappa}(t)\, t^{j-1} dt = \alpha_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa, \end{gathered} \tag{2.4.3}$$

где

$$K^0(u_{n+\varkappa}(x);\ x) = A(x)Z(x)\, u_{n+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\, u_{n+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x},$$

$$k(u_{n+\varkappa}(x);\ x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}\, k_{n,n}(x,\ t)\, u_{n+\varkappa}(t) dt,$$

$f_n(x)$, $k_{n,n}(x,\ t)$ и $u_{n+\varkappa}(x)$ – некоторые многочлены, которые будем однозначно определять при построении вычислительных схем, α_j – заданные числа.

Сначала продемонстрируем как мы будем упрощать оператор $k(u_{n+\varkappa}(x);\ x)$, так как для характеристического оператора $K^0(u_{n+\varkappa}(x);\ x)$ будем использовать предыдущие результаты.

В оператор $k(u_{n+\varkappa}(x);\ x)$ подставим, например, (2.4.1), возьмем

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, U_k(x)$$

и получим следующее:

$$k(u_{n+\varkappa}(x);\ x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)} \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} T_j(t)\, u_{n+\varkappa}(t) dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)} T_j(t) \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, U_k(t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)} T_j(t) U_k(t) dt = \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \Omega_{mk},$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)} T_j(t) U_k(t) dt.$$

Далее можно использовать (2.2.1) и упростить Ω_{mk}.

Здесь мы столкнулись с вычислением интеграла вида

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}P_M(t)dt,$$

где $P_M(x)$ – некоторый многочлен степени $M \geqslant 0$.

Укажем способ его вычисления, предполагая, что $b(x)$ аналитически продолжима с $[-1,\ 1]$ в комплексную плоскость и имеет там конечное число нулей. Требуемому условию удовлетворяет, например, рациональная функция.

С целью вычисления данного интеграла обратимся к вспомогательному

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\frac{X(\zeta)-R(\zeta)}{b(\zeta)}P_M(\zeta)d\zeta = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[\frac{X(z)-R(z)}{b(z)}P_M(z)\Big], \quad M=0,\ 1,\ \ldots\ ,$$

где Λ замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\ 1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки, $R(z)$ – интерполяционный многочлен, обладающий свойством: функция $b^{-1}(z)[\mathrm{X}(z)-R(z)]$ является аналитической в любой конечной точке плоскости, кроме, быть может, $[-1,\ 1]$, а ее предельные значения непрерывны на $(-1,\ 1)$. Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,\ 1]$, придем к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{X^+(t)-R(t)}{b(t)}P_M(t)dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{X^-(t)-R(t)}{b(t)}P_M(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(-2)}{b(t)}\frac{b(t)Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}P_M(t)dt = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}P_M(t)dt =$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\frac{\mathrm{X}(z)-R(z)}{b(z)}P_M(z)\right].$$

Дальнейшее очевидно.

Построим далее следующие вычислительные схемы.

Схема 2.4.1. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.2), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\,U_k(x), \tag{2.4.4}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

На тех же основаниях, что и в случае характеристического уравнения, от задачи (2.4.3) приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \dots\ ,\ c_{n+\varkappa}$, имеющей вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m}^{n} \rho_m^{(k)} c_{k+\varkappa} + \sum_{k=0}^{n+\varkappa} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \dots\ ,\ 0,\\
&\sum_{k=\varkappa-j}^{n+\varkappa} I_{kj}\, c_k = \alpha_j, \quad j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa,
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\rho_j^{(k)} = \begin{cases} 2H_{k+\varkappa-j}, & \varkappa > 0,\\ 2H_{k-j} + q_1^{(k-j)}, & \varkappa = 0,\end{cases}$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0,\\ 0, & M \neq 0,\end{cases}$$

$$H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{(M-1+(1-\varkappa)\delta_\varkappa)}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0,\\ 0, & M = 0,\end{cases}$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0,\\ 1, & \varkappa \geqslant 1,\end{cases}$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} U_k(t) T_j(t)\, dt,$$

$$I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\varkappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} b_m^{(k)},$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

Схема 2.4.2. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать его в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, T_k(x), \tag{2.4.6}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \dots\ ,$ $c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m}^{n} \gamma_m^{(k)} c_{k+\varkappa} + \sum_{k=0}^{n+\varkappa} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \dots\ ,\ 0,\\
&\sum_{k=\varkappa-j}^{n+\varkappa} I_{kj}\, c_k = \alpha_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa,
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$h_j\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0,5\,(q_1^{(k-j)} + q_1^{(k+j)}) + H_{k-j}, & \varkappa = 0, \\ H_{k+\varkappa-j}, & \varkappa > 0, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases}$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$H_N = \begin{cases} 0, & N = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{[\frac{N-1+(1-\varkappa)\delta_\varkappa}{2}]} b_r^{(N-1)}\, p_{N-2r}, & N > 0, \end{cases}$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0, \\ 1, & \varkappa \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} T_k(t) T_j(t) dt,$$

$$I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\varkappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m}\, a_m^{(k)},$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Схема 2.4.3. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, U_k(x), \tag{2.4.8}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,$ $c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m}^{n} \eta_m^{(k)} c_{k+\varkappa} + \sum_{k=0}^{n+\varkappa} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \\ &\sum_{k=\varkappa-j}^{n+\varkappa} I_{kj}\, c_k = \alpha_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa, \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$h_j \eta_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-j}{2}\right]} r_l^{(k+\varkappa-j+1)} p_{k+\varkappa-j-2l},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases}$$

$$r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}], \end{cases}$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} U_k(t) T_j(t) dt,$$

$$I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\varkappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} b_m^{(k)},$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Схема 2.4.4. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.2), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать его в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, T_k(x), \tag{2.4.10}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,$ $c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m}^{n} \alpha_m^{(k)} c_{k+\varkappa} + \sum_{k=0}^{n+\varkappa} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \\ &\sum_{k=\varkappa-j}^{n+\varkappa} I_{kj}\, c_k = \alpha_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa, \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k = 0, \varkappa = 0, \\ 0,5\,, & j = k \neq 0,\ \varkappa = 0, \\ p_{\varkappa+1}, & j = k-1,\ \varkappa = 0, \\ 1, & j = k, \varkappa = 1, \\ 2H_{k-j-1} + d_1^{(k-j-1)}, & k-j-2 \geqslant 0,\ \varkappa = 0, \\ 2H_{k+\varkappa-j-1}, & k+\varkappa-j-2 \geqslant 0,\ \varkappa > 0, \end{cases}$$

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M+(1-\varkappa)\delta_\varkappa}{2}\right]} a_r^{(M)} p_{M+1-2r}, \quad M \geqslant \delta_\varkappa(\varkappa - 1),$$

$$\delta_\varkappa = \begin{cases} 0, & \varkappa = 0, \\ 1, & \varkappa \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} T_k(t) T_j(t) dt,$$

$$I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\varkappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m}\, a_m^{(k)},$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

2.4.2. Решение полного уравнения в классе $h(-1,\ 1)$

Приближенное решение в случае $\varkappa < 0$ будем находить из уравнения

$$A(x)Z(x)\, u_{n-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B(t)Z(t) \frac{u_{n-|\varkappa|}(t)}{t - x} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)k_{n,n}(x,\, t)}{a^2(t) - b^2(t)} u_{n-|\varkappa|}(t) dt = f_n(x) + Q^*_{|\varkappa|-1}(x), \quad -1 < x < 1,$$

где $f_n(x)$, $u_{n-|\varkappa|}(x)$, $k_{n,n}(x,\, t)$ – многочлены, которые мы уточним позже, $Q^*_{|\varkappa|-1}(x)$ – некоторый многочлен с неопределенными коэффициентами $q_0^*,\ q_1^*,\ \ldots\ ,\ q^*_{|\varkappa|-1}$, которые мы будем определять так, чтобы обеспечивались условия разрешимости данного уравнения:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{b(t)}{Z(t)} \left(f_n(t) + Q^*_{|\varkappa|-1}(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(\tau)k_{n,n}(t, \tau)}{a^2(\tau) - b^2(\tau)} u_{n-|\varkappa|}(\tau) d\tau \right) t^{j-1} dt = 0,$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|.$$

Схема 2.4.5. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $k_{n,n}(x,\, t)$ определяется (2.4.2),

$$Q_{|\varkappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m U_m(x),$$

$u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x)=\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|}U_{k-|\varkappa|}(x), \tag{2.4.12}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система для определения c_k, $\quad k=0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-|\varkappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \sigma_m^{(k)} c_{k-|\varkappa|}+\sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} \Omega^*_{mk}c_k=f_m, \qquad m=n,\ n-1,\ \dots\ ,\ |\varkappa|\,, \tag{2.4.13}$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\sigma_j^{(k)}=-G_{k-|\varkappa|+j+2}+\begin{cases} G_0, & j=k-|\varkappa|,\\ G_{j-k+|\varkappa|}, & j>k-|\varkappa|,\\ 2H_{k-|\varkappa|-j}+G_{k-|\varkappa|-j}, & j<k-|\varkappa|,\end{cases}$$

$$H_M=\sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)}p_{M+2|\varkappa|-2r}, \qquad M>0,$$

$$G_M=\sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} q_r^{(M)}p_{2|\varkappa|-r+1},$$

числа $q_r^{(M)}$ определены в (2.1.9):

$$q_1^{(M)}=\begin{cases}1, & M=0,\\ 0, & M\neq 0,\end{cases} \qquad q_2^{(M)}=\begin{cases}0,5\,, & M=0,\\ 0, & M\neq 0,\end{cases}$$

$$q_{2l-1+\delta_M}^{(M)}=0, \qquad q_{2l-\delta_M}^{(M)}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} a^{(M)}_{\left[\frac{M}{2}\right]-m}\epsilon_{l+m-\delta_M}, \qquad l=1,\ 2,\ \dots,$$

$$\epsilon_0=1, \quad \epsilon_{k+1}=\frac{2k+1}{2k+2}\,\epsilon_k, \qquad k=0,\ 1,\ \dots,$$

$$\delta_M=(M+1) \bmod 2;$$

$$\Omega^*_{mk}=\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}U_k(t)\,T_j(t)dt,$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

Заметим, что здесь и далее не все уравнения, вытекающие из системы, используются для нахождения c_j.

Схема 2.4.6. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1),

$$Q_{|\varkappa|-1}(x)=\sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_mT_m(x),$$

$u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} T_{k-|\varkappa|}(x), \tag{2.4.14}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система для определения c_k, $k = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-|\varkappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \mu_m^{(k)} c_{k-|\varkappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} \Omega^*_{mk} c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \dots\ ,\ |\varkappa|, \tag{2.4.15}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$h_j\, \mu_j^{(k)} = 0,5\, G_{k-|\varkappa|+j} + \begin{cases} 0,5\ G_{k-|\varkappa|-j} + H_{k-|\varkappa|-j}, & k-j > |\varkappa|, \\ 0,5\, G_0, & k-j = |\varkappa|, \\ 0,5\, G_{-k+|\varkappa|+j}, & k-j < |\varkappa|, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{[\frac{M-1}{2}]} b_r^{(M-1)}\, p_{M+2|\varkappa|-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} q_r^{(M)}\, p_{2|\varkappa|-r+1},$$

числа $q_r^{(M)}$ определены в (2.1.9):

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases} \qquad q_2^{(M)} = \begin{cases} 0,5\,, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$q^{(M)}_{2l-1+\delta_M} = 0, \qquad q^{(M)}_{2l-\delta_M} = \sum_{m=0}^{[\frac{M}{2}]} a^{(M)}_{[\frac{M}{2}]-m}\, \epsilon_{l+m-\delta_M}, \qquad l = 1,\ 2,\ \dots,$$

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}\, \epsilon_k, \qquad k = 0,\ 1,\ \dots,$$

$$\delta_M = (M+1) \bmod 2;$$

$$\Omega^*_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)} T_k(t)\, T_j(t) dt,$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Схема 2.4.7. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.3), $k_{n,n}(x,\, t)$ определяется (2.4.2),

$$Q_{|\varkappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m U_m(x),$$

$u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} T_{k-|\varkappa|}(x), \tag{2.4.16}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система для определения $c_k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-|\varkappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \delta_m^{(k)} c_{k-|\varkappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} \Omega^*_{mk} c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|\,, \tag{2.4.17}$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\delta_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+1} + \begin{cases} G_{k-|\varkappa|-j-1} + 2\,H_{k-|\varkappa|-j-1}, & k-j > |\varkappa|+1, \\ H_0, & k-j = |\varkappa|+1, \\ -G_{j+|\varkappa|+1-k}, & k-j \le |\varkappa|, \end{cases}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{[\frac{M}{2}]} a_r^{(M)}\, p_{M+2|\varkappa|+1-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{|\varkappa|+1} d_r^{(M)}\, p_{2|\varkappa|-r+1},$$

числа $d_r^{(M)}$ определены в (2.1.11):

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \ne 1, \end{cases}$$

$$d_{2l-1+\delta_N}^{(N)} = 0,$$

$$d_{2l-\delta_N}^{(N)} = -\sum_{m=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b^{(N-1)}_{\left[\frac{N-1}{2}\right]-m} e_{l+m-\delta_N}\,, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,$$

$$e_0 = 0,5, \qquad e_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4}\, e_k, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,$$

$$\delta_N = N \bmod 2,$$

$$\Omega^*_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)}\, T_k(t)\, T_j(t) dt,$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

Схема 2.4.8. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1),

$$Q_{|\varkappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} q_m T_m(x),$$

$u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} U_{k-|\varkappa|}(x), \tag{2.4.18}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система для определения $c_k,\ k = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-|\varkappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \beta_m^{(k)} c_{k-|\varkappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} \Omega^*_{mk} c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \dots\ ,\ |\varkappa|\,, \tag{2.4.19}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$\beta_j^{(k)} = h_j \begin{cases} 0,5\,, & j = k,\ \varkappa = -1, \\ G_{k-j}, & k \geqslant j+1,\ \varkappa = -1, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} + H_{k-|\varkappa|-j+1} + G_{k-|\varkappa|-j+1}, & k-|\varkappa|-j \geqslant 0,\ |\varkappa| \geqslant 2, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} + \dfrac{1}{2} G_0, & k-|\varkappa|-j = -1,\ |\varkappa| \geqslant 2, \\ H_{k-|\varkappa|+j+1} - H_{|\varkappa|-k+j-1}, & k-|\varkappa|-j < -1,\ |\varkappa| \geqslant 2, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 2, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases}$$

$$H_N = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \sum\limits_{m=0}^{|\varkappa|-2} p_{|\varkappa|+m} s^{(N)}_{|\varkappa|-m+1}, & \varkappa \geqslant 2, \\ 0, & \varkappa = -1, \end{cases}$$

$$s_l^{(N)} = \sum_{p=[l/2]-1}^{l-3} d^{(N)}_{4-l+2p},$$

$$G_M = \sum_{l=0}^{\left[\frac{M+|\varkappa|-1}{2}\right]} p_{M+2|\varkappa|-1-2l} r_l^{(M)},$$

$$r_l^{(M)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(M)}, & l < \left[\frac{M}{2}\right], \\ 1 & l \geqslant \left[\frac{M}{2}\right], \end{cases}$$

числа $d_r^{(M)}$ определены в (2.1.11):

$$
\begin{aligned}
&d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases} \\
&d_{2l-1+\delta_N}^{(N)} = 0, \\
&d_{2l-\delta_N}^{(N)} = -\sum_{m=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_{\left[\frac{N-1}{2}\right]-m}^{(N-1)} e_{l+m-\delta_N}, \quad l = 1,\ 2,\ \dots\ , \\
&e_0 = 0,5, \qquad e_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4}\, e_k, \qquad k = 0,\ 1,\ \dots, \\
&\delta_N = N \bmod 2, \\
&\Omega_{mk}^* = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} U_k(t)\, T_j(t) dt,
\end{aligned}
$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Обоснование вычислительных схем

Обоснование вычислительных схем для полного уравнения проводится на базе следующей теоремы [64].

Теорема 2.4.1. *Пусть даны точное и приближенное уравнения Фредгольма*

$$
K(\varphi; x) \equiv \varphi(x) + \int_{-1}^{1} k(x,\, t)\varphi(t) dt = f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.4.20}
$$

$$
K_n(\varphi_n; x) \equiv \varphi_n(x) + \int_{-1}^{1} k_n(x,\, t)\varphi_n(t) dt = f_n(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.4.21}
$$

где заданные функции $k(x,\, t)$, $k_n(x,\, t)$, $f(x)$, $f_n(x)$ непрерывны (первые две могут допускать по t интегрируемые особенности в окрестностях точек ± 1). Пусть далее известно, что однородное уравнение (2.4.20) неразрешимо, и, кроме того, $\max\limits_{x} \int_{-1}^{1} |\gamma(x,\, t)|\, dt \leqslant \rho$, где $\gamma(x,\, t)$ – резольвента ядра $k(x,\, t)$.

Если выполнено условие $\varepsilon_1 B < 1$, где

$$
\varepsilon_1 = \max_x \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \Big|\varepsilon(x,\, t)\Big| \Big|k_n(t, T_1)\Big| dT_1 dt, \quad \varepsilon(x,\, t) = k(x,\, t) - k_n(x,\, t),
$$

$B = 1 + \rho$, то уравнение (2.4.21) разрешимо и

$$
\Big\| K_n^{-1} \Big\|_\infty \leqslant \frac{1 + BK_1}{1 - \varepsilon_1 B}, \quad K_1 = \max_x \int_{-1}^{1} \Big| k_{n,n}(x,\, t) \Big| dt.
$$

Кроме того,

$$\left\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right\|_\infty \leqslant \frac{1+BK_1}{1-\varepsilon_1 B}\left[\varepsilon_2 B\left\|f\right\|_\infty+\varepsilon_3\right],$$

где

$$\varepsilon_2=\max_x\int\limits_{-1}^{1}\left|\varepsilon(x,\,t)\right|dt,\quad \varepsilon_3=\left\|f(x)-f_n(x)\right\|_\infty.$$

Для точного решения уравнения (1.1.4) и приближенных решений (2.4.4), (2.4.6), (2.4.8), (2.4.10) имеет место следующее утверждение [64].

Теорема 2.4.2. *Пусть уравнение* (1.1.7) *удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение $\varphi(x)$ *ищется в классе* $h(0)$;
2) функции $a(x), b(x)$ *непрерывны по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0$ $\forall x\in[-1,\ 1]$, $f(x)$, $k(x,\,t)$ *принадлежат классу* $W^r H^\mu$, $r\geqslant 0$, $0<\mu\leqslant 1$ (*вторая по обеим переменным*);
3) индекс $\varkappa$ *характеристического оператора* K^0 *неотрицателен*;
4) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x), k(x,\,t)$ *взяты соответственно многочлены:* $f_n(x)$, *определяемый* (2.3.3) *или* (2.3.2); $k_{n,n}(x,\,t)$, *определяемый* (2.4.2) *или* (2.4.1);
5) однородное уравнение (2.1.4) *неразрешимо.*

Тогда при достаточно больших n *система* (2.4.5) (*системы* 2.4.7) – (2.4.11)) *разрешима и имеет место оценка*

$$\left\|u(x)-u_{n+\varkappa}(x)\right\|_\infty\leqslant M\frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}. \tag{2.4.22}$$

Доказательство. Система (2.4.5) ((2.4.7) – (2.4.11)) и задача (2.4.3) (в смысле разрешимости) эквивалентны, поэтому для разрешимости систем (2.4.5) ((2.4.7) – (2.4.11)) достаточно доказать разрешимость задачи (2.4.3), которая, как явствует из предыдущего, эквивалентна (снова в смысле разрешимости) уравнению Фредгольма

$$u_{n+\varkappa}(x)+\int\limits_{-1}^{1}N_{n,n}(x,\,t)\,u_{n+\varkappa}(t)dt=F_n(x),\quad -1<x<1, \tag{2.4.23}$$

в котором

$$N_{n,n}(x,\,t)=\frac{1}{\pi i}\frac{Z(t)}{Z(x)(a^2(t)-b^2(t))}\left[a(x)k_{n,n}(x,\,t)-\frac{Z(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(\tau)}{Z(\tau)}k_{n,n}(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x}\right],$$

$$F_n(x)=\frac{a(x)}{Z(x)}f_n(x)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f_n(t)\frac{dt}{t-x}+P_{\varkappa-1}(x).$$

Чтобы установить разрешимость уравнения (2.4.23) достаточно, согласно предыдущей теореме, оценить

$$\varepsilon_1 = \max_x \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big|N(x,\,t) - N_{n,n}(x,\,t)\Big|\Big|N_{n,n}(t,t_1)\Big| dt dt_1.$$

Привлекая оценки из [55], имеем

$$\Big|N(x,\,t) - N_{n,n}(x,\,t)\Big| = \Bigg|\frac{1}{\pi i}\frac{Z(t)Z^{-1}(x)}{a^2(t)-b^2(t)}\times$$

$$\times\left[a(x)\Big(k(x,\,t)-k_{n,n}(x,\,t)\Big) - \frac{Z(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(\tau)}{Z(\tau)}\Big(k(\tau,t)-k_{n,n}(\tau,t)\Big)\frac{d\tau}{\tau - x}\right]\Bigg| =$$

$$= (1-t)^{\operatorname{Re}\alpha}(1+t)^{\operatorname{Re}\beta} O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}\right),$$

где α, β – числа, входящие в представление

$$Z(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, Z_0(x), \quad -1 < \operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}\beta < 0,$$

$Z_0(x)$ – ограниченная функция. Следовательно,

$$\varepsilon_1 = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}\right).$$

Значит, при достаточно больших n уравнение (2.4.23) разрешимо.
Учитывая еще оценки

$$K_1 = \max_x \int_{-1}^{1}\Big|N_{n,n}(x,\,t)\Big| dt =$$

$$= \max_x \int_{-1}^{1}\Big|(N_{n,n}(x,\,t) - N(x,\,t)) + N(x,\,t)\Big| dt = O(1),$$

$$\varepsilon_2 = \max_x \int_{-1}^{1}\Big|N(x,\,t) - N_{n,n}(x,\,t)\Big| dt = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}\right),$$

$$\varepsilon_3 = \Big\|F(x) - F_n(x)\Big\|_\infty = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}\right),$$

убеждаемся в справедливости неравенства (2.4.22). □

Аналогично имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4.3. *Пусть уравнение* (1.1.7) *удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение $\varphi(x)$ *ищется в классе* $h(-1,\ 1)$;
2) индекс $\varkappa$ *характеристического оператора* K^0 *отрицателен;*
3) функции $a(x), b(x)$ *непрерывны по Гельдеру, причем* $a^2(x) - b^2(x) \neq 0$ $\forall x \in [-1,\ 1]$, $f(x)$, $k(x,\, t)$ *принадлежат классу* $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ (*вторая функция – по обеим переменным*);
4) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $k(x,\, t)$ *взяты соответственно многочлены:* $f_n(x)$, *определяемый* (2.3.2) *или* (2.3.3); $k_{n,n}(x,\, t)$, *определяемый* (2.4.1) *или* (2.4.2);
5) однородное уравнение (2.1.6) *неразрешимо.*

Тогда при достаточно больших n *системы* (2.4.13) – (2.4.19) *разрешимы и имеет место оценка*

$$\Big\|Z(x)\Big[u(x) - u_{n-|\varkappa|}(x)\Big]\Big\|_\infty \leqslant M\frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}. \tag{2.4.24}$$

Доказательство. На основании (2.1.6) оценим величину

$$\varepsilon_1^* = \max_x \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big|N^*(x,\, t) - N^*_{n,n}(x,\, t)\Big|\Big|N^*_{n,n}(t, t_1)\Big|dt dt_1,$$

где

$$N^*_{n,n}(x,\, t) = \frac{1}{\pi i}\frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)}\left(a(x)k_{n,n}(x,\, t) - \frac{Z(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(\tau)}{Z(\tau)}k_{n,n}(\tau, t)\frac{d\tau}{\tau - x}\right).$$

Поскольку в рассматриваемом классе функций

$$Z(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta Z_0(x), \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}\beta < 1,$$

то из [55] вытекает оценка

$$\Big|N^*(x,\, t) - N^*_{n,n}(x,\, t)\Big| = (1-t)^{\operatorname{Re}\alpha}(1+t)^{\operatorname{Re}\beta} O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}\right).$$

Следовательно, при достаточно больших n уравнение

$$Z(x)u_{n-|\varkappa|}(x) + \int_{-1}^{1} N^*_{n,n}(x,\, t)Z(t)\, u_{n-|\varkappa|}(t)dt = F^*_n(x), \quad -1 < x < 1,$$

где

$$F^*_n(x) = a(x)f_n(x) - \frac{Z(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f_n(t)\frac{dt}{t - x}$$

разрешимо.

Учитывая еще оценки

$$K_1 = \max_x \int_{-1}^{1} \Big|N^*_{n,n}(x,\, t)\Big| dt =$$

$$= \max_x \int_{-1}^{1} \Big|(N^*_{n,n}(x,\, t) - N^*(x,\, t)) + N^*(x,\, t)\Big| dt = O(1),$$

$$\varepsilon^*_2 = \max_x \int_{-1}^{1} \Big|N(x,\, t)^* - N^*_{n,n}(x,\, t)\Big| dt = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}\right),$$

$$\varepsilon^*_3 = \Big\|F(x)^* - F^*_n(x)\Big\|_\infty = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}\right),$$

убеждаемся в справедливости неравенства (2.4.24). □

Замечание 2.4.1. *Так как*

$$\varphi(x) = \frac{Z(x)\, u(x)}{a^2(x) - b^2(x)} = \frac{X^+(x)\, u(x)}{a(x) - b(x)}$$

при

$$X^+(x) = (x-1)^{-\varkappa_1}(x+1)^{-\varkappa_2} e^{\Gamma^+(x)}, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa,$$
$$\Gamma^+(x) = \frac{1}{2}\ln G(x) + \Gamma(x),$$
$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\ln G(t)}{t-x} dt, \quad G(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)},$$

то из этого представления следует, что любой алгоритм приближенного нахождения неизвестной функции $u(x)$ должен использовать квадратуру для вычисления сингулярного интеграла $\Gamma(x)$.

Такие сходящиеся квадратурные формулы, основанные на интерполировании сплайнами, представлены в [64].

Глава 3

Сингулярные интегральные уравнения с постоянными коэффициентами

3.1. Некоторые основные сведения из теории СИУ

Напомним некоторые основные сведения из теории сингулярного интегрального уравнения с постоянными комплексными коэффициентами:

$$a\,\varphi(x) + \frac{b}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} k(x,\,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad -1 < x < 1. \tag{3.1.1}$$

Как и ранее, перейдем в уравнении (3.1.1) к новой неизвестной функции $u(x)$ по правилу

$$\varphi(x) = \frac{Z(x)}{a^2 - b^2}u(x), \tag{3.1.2}$$

где

$$Z(x) = (a+b\,)X^+(x) = (a-b\,)X^-(x), \quad -1 < x < 1,$$

$X^\pm(x)$ – предельные значения канонической функции $X(z)$ задачи линейного сопряжения

$$X^+(x) = \frac{a-b}{a+b}X^-(x), \quad -1 < x < 1,$$

и в окрестности бесконечно удаленной точки, имеющей разложение

$$X(z) = \frac{1}{z^{\varkappa}} + \frac{c_1}{z^{\varkappa+1}} + \frac{c_2}{z^{\varkappa+2}} + \cdots\,.$$

Так как (по определению)

$$X(z) = (z-1)^{-\varkappa_1}(z+1)^{-\varkappa_2}e^{\Gamma^+(x)}, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa,$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln G}{t-z}dt, \qquad G = \frac{a-b}{a+b}, \qquad -\pi < \arg G \leqslant \pi,$$

то в случае, когда a и b – постоянные, $X^+(x)$ принимает вид

$$X^+(x) = p(x), \quad p(x) = (x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}, \quad \operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\beta > -1,$$
$$\alpha = \frac{\ln G}{2\pi i} - \varkappa_1, \quad \beta = -\frac{\ln G}{2\pi i} - \varkappa_2, \quad -\pi < \arg G \leqslant \pi,$$

$\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ могут принимать значения 0 или ± 1.

В данном случае $X(z)$ имеет следующее разложение в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\begin{gathered} X(z) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_l}{z^{\varkappa+l}}, \\ c_l = \sum_{j=0}^{l} g_j\, v_{l-j}, \quad l = 0,\,1,\ldots, \\ g_0 = v_0 = 1, \quad g_{j+1} = \frac{j-\alpha}{j+1}\, g_j, \quad v_{j+1} = \frac{\beta - j}{j+1}\, v_j, \quad j = 0,\,1,\ldots . \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

Если придерживаться обозначений (1.1.10), (1.1.11), то

$$p_{\varkappa+l} = c_l, \quad \varkappa \geqslant 0, \quad l = 0,\,1,\ldots, \qquad p_{|\varkappa|+l} = c_l, \quad \varkappa = -1, \quad l = 0,\,1,\ldots .$$

После введения обозначений $A = \dfrac{a}{a^2-b^2}$, $B = \dfrac{b}{a^2-b^2}$ уравнение (3.1.1) примет вид

$$K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3.1.4}$$

$$\begin{gathered} K^0(u(x);\, x) = A\, Z(x)\, u(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t)\frac{u(t)}{t-x}dt, \\ k(u(x);\, x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2-b^2}k(x,\, t)\, u(t)dt. \end{gathered} \tag{3.1.5}$$

3.1.1. Характеристическое уравнение

Если ищется решение $\varphi(x)$, определяемое (3.1.2), класса $h(0)$ ($\varkappa = 1$), то решение уравнения

$$K^0(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3.1.6}$$

определяется формулой [26], [17]

$$u(x) = \frac{a}{Z(x)}f(x) - \frac{b}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{Z(t)}f(t)\frac{dt}{t-x} + \gamma_0, \tag{3.1.7}$$

где γ_0 – произвольное комплексное число. Это число будет однозначно определено, если к (3.1.6) будет присоединено условие

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t)\, u(t)dt = \alpha_0, \tag{3.1.8}$$

где α_0 – заданное число.

Если ищется решение $\varphi(x)$ классов $h(1)$ или $h(-1)$ ($\varkappa = 0$), то решение уравнения (3.1.6) определяется формулой

$$u(x) = \frac{a}{Z(x)}f(x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{b}{Z(t)}f(t)\frac{dt}{t-x}. \tag{3.1.9}$$

Если же решение уравнения (3.1.6) ищется в классе $h(-1,\ 1)$ ($\varkappa = -1$), тогда при выполнении условия (необходимого и достаточного)

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{b}{Z(t)}f(t)dt = 0, \tag{3.1.10}$$

решение $u(x)$ определяется формулой (3.1.9) .

3.1.2. Полное уравнение

Уравнение (3.1.1), записанное в форме (3.1.4), эквивалентно (в смысле разрешимости) уравнению Фредгольма вида

$$u(x) + \int\limits_{-1}^{1} N(x,\, t)\, u(t)dt = F(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3.1.11}$$

в котором

$$N(x,\, t) = \frac{1}{\pi i}\frac{Z^{-1}(x)Z(t)}{a^2-b^2}\left[a\, k(x,\, t) - \frac{Z(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b}{Z(\tau)}k(\tau, t)\frac{d\tau}{\tau - x}\right],$$

$$F(x) = \frac{a}{Z(x)}f(x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b}{Z(t)}\, f(t)\frac{dt}{t-x} + \rho_{\varkappa-1} \quad (\rho_{\varkappa-1} \equiv 0, \varkappa \leqslant 0).$$

Если однородное уравнение (3.1.11) ($F(x) \equiv 0$) неразрешимо (имеет только нулевое решение), то решение неоднородного уравнения (3.1.11) дается формулой

$$u(x) = F(x) - \int\limits_{-1}^{1}\Gamma(x,\, t)F(t)dt,$$

где $\Gamma(x,\, t)$ – резольвента ядра $N(x,\, t)$.

Справедлива теорема, аналогичная теореме 2.1.1.

Теорема 3.1.1. *Пусть решение $\varphi(x)$ уравнения (3.1.1) ищется в классе $h(0)$, т. е. индекс $\varkappa$ характеристического оператора K^0, определяемого (3.1.5), равен единице, однородное уравнение (3.1.11) неразрешимо.*

Тогда задача

$$
\begin{gathered}
K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1, \\
\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t)\, u(t)dt = \alpha_0,
\end{gathered}
\tag{3.1.12}
$$

имеет единственное решение.

Если ищется решение $\varphi(x)$ уравнения (3.1.1) в классе $h(-1,1)$ (класс ограниченных функций, $\varkappa = -1$), то уравнение (3.1.4) эквивалентно уравнению Фредгольма вида

$$
u^*(x) + \int\limits_{-1}^{1} N^*(x,\, t)\, u^*(t)dt = F^*(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3.1.13}
$$

в котором

$$
u^*(x) = Z(x)\, u(x),
$$

$$
N^*(x,\, t) = \frac{1}{\pi i}\frac{1}{a^2 - b^2}\left(a\, k(x,\, t) - \frac{Z(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b}{Z(\tau)}k(\tau, t)\frac{d\tau}{\tau - x}\right),
$$

$$
F^*(x) = af(x) - \frac{Z(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b}{Z(t)}f(t)\frac{dt}{t - x},
$$

с присоединенным к нему уравнением (условием разрешимости)

$$
\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b}{Z(t)}f(t)dt = \frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{b}{Z(t)}\frac{Z(\tau)}{a^2 - b^2}k(t, \tau)\, u(\tau)d\tau dt.
$$

3.2. Разложение оператора K^0 по многочленам Чебышева

Пусть, как и ранее,

$$K^0(u(x);\, x) = A\, Z(x)\; u(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t)\, u(t)\frac{dt}{t-x}.$$

Используя результаты предыдущей главы, выпишем различные варианты разложения оператора K^0 по многочленам Чебышева первого и второго рода.

Напомним введенные ранее обозначения переменных: коэффициенты $p_{\varkappa},\ p_{\varkappa+1},\ \ldots\ ,\ p_{|\varkappa|},\ p_{|\varkappa|+1},\ \ldots$ находятся соответственно из разложений $X(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ согласно (3.1.3); переменные, определенные в (2.1.7), (2.1.8):

$$a_0^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2^{n-1}, & n > 0, \end{cases}$$
$$a_{k+1}^{(n)} = -\frac{(n-2k-1)\,(n-2k)}{4(k+1)\,(n-k-1)}\, a_k^{(n)},$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ \left[\frac{n-1}{2}\right];$$

$$b_0^{(n-1)} = 2^{n-1},$$
$$b_k^{(n-1)} = -\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{4k(n-k)}\, b_{k-1}^{(n-1)},$$
$$k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \left[\frac{n-1}{2}\right];$$

переменные, определенные в (2.1.11), (2.1.9):

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases} \qquad d_2^{(N)} = \begin{cases} -0,25\,, & N = 2, \\ 0, & N \neq 2; \end{cases} \tag{3.2.1}$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases} \qquad q_2^{(M)} = \begin{cases} 0,5\,, & M = 1, \\ 0, & M \neq 1. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

В следующих теоремах будут использоваться (3.2.1), (3.2.2).

Теорема 3.2.1. *Пусть $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.6) *с индексом $\varkappa \geqslant 0$ одного из классов: $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$.*

Тогда для $x \in (-1,\ 1)$ справедливы формулы

$$K^0(T_{k+\varkappa}(x); x) = \alpha_0^{(k)} U_0(x) + \alpha_1^{(k)} U_1(x) + \ldots + \alpha_k^{(k)} U_k(x), \quad k \geqslant 0, \tag{3.2.3}$$

где

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k = 0, \varkappa = 0, \\ 0,5\,, & j = k \neq 0,\ \varkappa = 0, \\ p_{\varkappa+1}, & j = k-1,\ \varkappa = 0, \\ 1, & j = k, \varkappa = 1, \\ 2H_{k-j-1} + d_1^{(k-j-1)}, & j \leqslant k-2,\ \varkappa = 0, \\ 2H_{k+\varkappa-j-1}, & j \leqslant k-1,\ \varkappa = 1, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{[\frac{M}{2}]} a_r^{(M)} p_{M+1-2r};$$

$$K^0(U_{k+\varkappa}(x);\ x) = \rho_0^{(k)} U_0(x) + \ldots + \rho_k^{(k)} U_k(x), \quad k \geqslant 0, \tag{3.2.4}$$

где

$$\rho_j^{(k)} = \begin{cases} 2H_{k+\varkappa-j}, & \varkappa = 1, \\ 2H_{k-j} + q_1^{(k-j)}, & \varkappa = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{[\frac{M-1}{2}]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0, \\ 0, & M = 0; \end{cases}$$

$$K^0(T_{k+\varkappa}(x); x) = \gamma_0^{(k)} T_0(x) + \cdots + \gamma_k^{(k)} T_k(x), \quad k \geqslant 0, \tag{3.2.5}$$

где

$$h_j \gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0,5\,(q_1^{(k-j)} + q_1^{(k+j)}) + H_{k-j}, & \varkappa = 0, \\ H_{k+\varkappa-j}, & \varkappa = 1, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_N = \begin{cases} 0, & N = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{[\frac{N-1}{2}]} b_r^{(N-1)} p_{N-2r}, & N > 0; \end{cases}$$

$$K^0(U_{k+\varkappa}(x); x) = \eta_0^{(k)} T_0(x) + \cdots + \eta_k^{(k)} T_k(x), \quad k \geqslant 0, \tag{3.2.6}$$

где

$$h_j\eta_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{[\frac{k-j}{2}]} r_l^{(k+\varkappa-j+1)} p_{k+\varkappa-j-2l},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j>0, \\ 1, & j=0, \end{cases} \quad j=\overline{0,\ k},$$

$$r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}]. \end{cases}$$

Теорема 3.2.2. *Пусть $X(z)$ – каноническая функция задачи линейного сопряжения (1.1.6) класса $h(-1,\ 1)$ $(\varkappa=-1)$.*

Тогда для $x\in(-1,\ 1)$ справедливы формулы

$$K^0(U_{k-|\varkappa|}(x);x) = \sigma_0^{(k)}U_0(x)+\sigma_1^{(k)}U_1(x)+\ldots+\sigma_k^{(k)}U_k(x), \quad k\geqslant|\varkappa|, \tag{3.2.7}$$

где

$$\sigma_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+2} + \begin{cases} G_0, & j=k-1, \\ G_{j-k+|\varkappa|}, & j>k-|\varkappa|, \\ 2H_{k-|\varkappa|-j}+G_{k-|\varkappa|-j}, & j<k-|\varkappa|, \end{cases}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{[\frac{M-1}{2}]} b_r^{(M-1)} p_{M+2|\varkappa|-2r}, \qquad M>0,$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{2} q_r^{(M)} p_{2|\varkappa|-r+1};$$

$$K^0(T_{k-|\varkappa|}(x);x) = \delta_0^{(k)}U_0(x)+\cdots+\delta_k^{(k)}U_k(x), \quad k\geqslant|\varkappa|, \tag{3.2.8}$$

где

$$\delta_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+1} + \begin{cases} G_{k-|\varkappa|-j-1}+2\,H_{k-|\varkappa|-j-1}, & k-j>|\varkappa|+1, \\ H_0, & k-j=|\varkappa|+1, \\ -G_{j+|\varkappa|+1-k}, & k-j\leqslant|\varkappa|, \end{cases}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{[\frac{M}{2}]} a_r^{(M)}\,p_{M+2|\varkappa|+1-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{2} d_r^{(M)}\,p_{2|\varkappa|+1-r};$$

$$K^0(U_{k-|\varkappa|}(x);x) = \beta_0^{(k)}T_0(x)+\beta_1^{(k)}T_1(x)+\ldots+\beta_k^{(k)}T_k(x), \quad k\geqslant|\varkappa|, \tag{3.2.9}$$

где

$$h_j \beta_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ H_{k-j}, & k \geqslant j+1, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{l=0}^{\left[\frac{M+|\varkappa|-1}{2}\right]} p_{M+2|\varkappa|-1-2l} r_l^{(M)},$$

$$r_l^{(M)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(M)}, & l < \left[\frac{M}{2}\right], \\ 1 & l \geqslant \left[\frac{M}{2}\right]; \end{cases}$$

$$K^0(T_{k-|\varkappa|}(x); x) = \mu_0^{(k)} T_0(x) + \cdots + \mu_k^{(k)} T_k(x), \quad k \geqslant |\varkappa|, \tag{3.2.10}$$

где

$$h_j\, \mu_j^{(k)} = 0,5\, G_{k-|\varkappa|+j} + \begin{cases} 0,5\ G_{k-|\varkappa|-j} + H_{k-|\varkappa|-j}, & k-j > |\varkappa|, \\ 0,5\, G_0, & k-j = |\varkappa|, \\ 0,5\, G_{-k+|\varkappa|+j}, & k-j < |\varkappa|, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)}\, p_{M+2|\varkappa|-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{2} q_r^{(M)}\, p_{2|\varkappa|-r+1}.$$

3.3. Приближенное решение характеристического уравнения с постоянными коэффициентами

Применим приведенные в предыдущем параграфе разложения сингулярного характеристического оператора по многочленам Чебышева к построению приближенного решения характеристического уравнения

$$A\,Z(x)\,u(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)\,u(t)\frac{dt}{t-x} = f(x), \quad -1 < x < 1. \tag{3.3.1}$$

При построении вычислительных схем снова будем использовать интерполяционные многочлены по узлам Чебышева первого рода (2.3.2), (2.3.3).

3.3.1. Решение характеристического уравнения в классе $h(0)(\varkappa = 1)$

Приближенное решение задачи (3.3.1), (3.1.8) найдем как решение задачи

$$A\,Z(x)\,u_{n+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)\,u_{n+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x} = f_n(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3.3.2}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)\,u_{n+\varkappa}(t)dt = \alpha_0, \tag{3.3.3}$$

где $f_n(x)$ – некоторый интерполяционный многочлен.

Так как решением задачи (3.3.2), (3.3.3) является алгебраический многочлен степени не выше $n+\varkappa$ ($\varkappa = 1$), будем искать его в виде линейной комбинации многочленов Чебышева. Получим следующие схемы.

Схема 3.3.1. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\,U_k(x), \tag{3.3.4}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.4) в (3.3.2), получаем при $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa}\left[A\,Z(x)\,U_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)\,U_{k+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x}\right] = f_n(x). \tag{3.3.5}$$

Учитывая (3.2.4), из (3.3.5) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa}\left[\rho_0^{(k)}U_0(x)+\rho_1^{(k)}U_1(x)+\dots+\rho_k^{(k)}U_k(x)\right]=\sum_{j=0}^{n} f_j\,U_j(x),\ -1<x<1.$$

Отсюда для определения $c_{\varkappa},\ c_{\varkappa+1},\ \dots,\ c_{\varkappa+n}$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \rho_j^{(k)} c_{k+\varkappa}=f_j, \qquad j=n,\ n-1,\ \dots,\ 0. \tag{3.3.6}$$

Недостающее неизвестное c_0 определим из равенства (3.3.3) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B\,Z(t)\,U_k(t)dt\right]=-\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,U_k(z)\Big)\right]=\alpha_0.$$

Учитывая (2.1.8), отсюда будем иметь уравнение

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\,I_k=\alpha_0, \qquad I_k=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} p_{k+1-2m} b_m^{(k)}. \tag{3.3.7}$$

Решение системы (3.3.6), (3.3.7) определяется формулами

$$\begin{aligned}
c_{n+\varkappa}&=\frac{f_n}{\rho_n^{(n)}},\\
c_{n+\varkappa-l}&=\frac{1}{\rho_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l}-\sum_{j=1}^{l} c_{n+\varkappa-l+j}\,\rho_{n-l}^{(n-l+j)}\right], \qquad l=1,\ 2,\ \dots,\ n,\\
c_0&=\frac{1}{I_0}\left[\alpha_0-\sum_{k=1}^{n+\varkappa} c_k\,I_k\right],
\end{aligned}$$

где

$$\rho_j^{(k)}=2H_{k+\varkappa-j}, \quad j=\overline{0,\ k},$$

$$H_M=\begin{cases}\displaystyle\sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M>0,\\ 0, & M=0.\end{cases}$$

Схема 3.3.2. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\,T_k(x), \tag{3.3.8}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.8) в (3.3.2), получаем при $-1 < x < 1$

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa}\left[A\,Z(x)\,T_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)\,T_{k+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x}\right] = f_n(x). \tag{3.3.9}$$

Учитывая (3.2.5), из (3.3.9) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa}\left[\gamma_0^{(k)}T_0(x) + \gamma_1^{(k)}T_1(x) + \cdots + \gamma_k^{(k)}T_k(x)\right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\,T_j(x),\ -1 < x < 1.$$

Отсюда для определения $c_\varkappa,\ c_{\varkappa+1},\ \ldots\ ,\ c_{\varkappa+n}$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n}\gamma_j^{(k)}c_{k+\varkappa} = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0. \tag{3.3.10}$$

Недостающее неизвестное c_0 определим из равенства (3.3.3) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)\,T_k(t)dt\right] = -\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(X(z)\,T_k(z)\Big)\right] = \alpha_0.$$

Учитывая (2.1.7), отсюда будем иметь уравнение

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\,I_k = \alpha_0, \qquad I_k = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} p_{k+1-2m}\,a_m^{(k)}. \tag{3.3.11}$$

Решение системы (3.3.10), (3.3.11) определяется формулами

$$c_{n+\varkappa} = \frac{f_n}{\gamma_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\varkappa-l} = \frac{1}{\gamma_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\varkappa-l+j}\gamma_{n-l}^{(n-l+j)}\right], \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,$$

$$c_0 = \frac{1}{I_0}\left[\alpha_0 - \sum_{k=1}^{n+\varkappa} c_k\,I_k\right],$$

где

$$h_j\gamma_j^{(k)} = H_{k+\varkappa-j},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0,\\ 1, & j = 0,\end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_N = \begin{cases} 0, & N = 0,\\ \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_r^{(N-1)}\,p_{N-2r}, & N > 0.\end{cases}$$

Схема 3.3.3. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \, U_k(x), \tag{3.3.12}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.12) в (3.3.2), получаем при $-1 < x < 1$

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa} \left[A\, Z(x)\, U_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, U_{k+\varkappa}(t) \frac{dt}{t-x} \right] = f_n(x). \tag{3.3.13}$$

Учитывая (3.2.6), из (3.3.13) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa} \left[\eta_0^{(k)} T_0(x) + \eta_1^{(k)} T_1(x) + \cdots + \eta_k^{(k)} T_k(x) \right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\, T_j(x), \; -1 < x < 1.$$

Отсюда для определения $c_\varkappa, \; c_{\varkappa+1}, \; \ldots \;, \; c_{\varkappa+n}$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \eta_j^{(k)} c_{k+\varkappa} = f_j, \qquad j = n, \; n-1, \; \ldots \;, \; 0. \tag{3.3.14}$$

Недостающее неизвестное c_0 определим из равенств (3.3.3) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, U_k(t) dt \right] = -\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[\operatorname*{Res}_{z=\infty} \Big(X(z)\, U_k(z) \Big) \right] = \alpha_0.$$

Учитывая (2.1.8), отсюда будем иметь уравнение

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, I_k = \alpha_0, \qquad I_k = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} p_{k+1-2m}\, b_m^{(k)}. \tag{3.3.15}$$

Решение системы (3.3.14), (3.3.15) определяется формулами:

$$c_{n+\varkappa} = \frac{f_n}{\eta_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\varkappa-l} = \frac{1}{\eta_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\varkappa-l+j} \eta_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \; l = 1, \; 2, \; \ldots \;, \; n,$$

$$c_0 = \frac{1}{I_0} \left[\alpha_0 - \sum_{k=1}^{n+\varkappa} c_k\, I_k \right],$$

где

$$h_j \eta_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{[\frac{k-j}{2}]} r_l^{(k+\varkappa-j+1)} p_{k+\varkappa-j-2l},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}]. \end{cases}$$

Схема 3.3.4. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, T_k(x), \tag{3.3.16}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.16) в (3.3.2), получаем при $-1 < x < 1$

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa} \left[A\, Z(x)\, T_{k+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, T_{k+\varkappa}(t) \frac{dt}{t-x} \right] = f_n(x). \tag{3.3.17}$$

Учитывая (3.2.3), из (3.3.17) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa} \left[\alpha_0^{(k)} U_0(x) + \alpha_1^{(k)} U_1(x) + \cdots + \alpha_k^{(k)} U_k(x) \right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\, U_j(x).$$

Отсюда для определения $c_\varkappa,\ c_{\varkappa+1},\ \ldots\ ,\ c_{\varkappa+n}$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \alpha_j^{(k)} c_{k+\varkappa} = f_j, \qquad\qquad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0. \tag{3.3.18}$$

Недостающее неизвестное c_0 определим из равенств (3.3.3) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, T_k(t) dt \right] = -\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[\operatorname*{Res}_{z=\infty} \Big(X(z)\, T_k(z) \Big) \right] = \alpha_0.$$

Учитывая (2.1.7), отсюда будем иметь уравнение

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, I_k = \alpha_0, \qquad I_k = \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} p_{k+1-2m}\, a_m^{(k)}. \tag{3.3.19}$$

Решение системы (3.3.18), (3.3.19) определяется формулами

$$c_{n+\varkappa} = \frac{f_n}{\alpha_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\varkappa-l} = \frac{1}{\alpha_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\varkappa-l+j}\,\alpha_{n-l}^{(n-l+j)}\right],\ l = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n,$$

$$c_0 = \frac{1}{I_0}\left[\alpha_0 - \sum_{k=1}^{n+\varkappa} c_k\, I_k\right],$$

где

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 2H_{k+\varkappa-j-1}, & k+\varkappa-j-2 \geqslant 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{M} a_r^{(M)} p_{M+1-2r}.$$

3.3.2. Решение характеристического уравнения в классе $h(-1,\ 1)$ $(\varkappa = -1)$

Приближенное решение в этом случае найдем из уравнения

$$A\,Z(x)\,u_{n-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B\,Z(t)\,u_{n-|\varkappa|}(t)\frac{dt}{t-x} = f_n(x) + q_0, \tag{3.3.20}$$

где $f_n(x)$ – некоторый интерполяционный многочлен, q_0– константа, позволяющая обеспечить условие разрешимости уравнения (3.3.20), которую будем определять из условий разрешимости уравнения (3.3.20):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b}{Z(t)}\Big(f_n(t) + q_0\Big)dt = 0.$$

Интеграл, входящий в левую часть последнего равенства, вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b}{Z(t)}\Big(f_n(t) + q_0\Big)dt = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X^{-1}(z)\Big(f_n(z) + q_0\Big)\Big].$$

Имеют место следующие вычислительные схемы .

Схема 3.3.5. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|}U_{k-|\varkappa|}(x), \tag{3.3.21}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.21) в (3.3.20), с учетом формулы (3.2.7) получаем при $-1 < x < 1$

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|}\left[A\,Z(x)\,U_{k-|\varkappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)\,U_{k-|\varkappa|}(t)\frac{dt}{t-x}\right]=$$

$$=\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|}\left[\sigma_0^{(k)}U_0(x)+\sigma_1^{(k)}U_1(x)+\ldots+\sigma_k^{(k)}U_k(x)\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n} f_j\,U_j(x)+q_0U_0(x), \tag{3.3.22}$$

$$\sigma_j^{(k)}=-G_{k-|\varkappa|+j+2}+\begin{cases}G_0, & j=k-|\varkappa|,\\ G_{j-k+|\varkappa|}, & j>k-|\varkappa|,\\ 2H_{k-|\varkappa|-j}+G_{k-|\varkappa|-j}, & j<k-|\varkappa|,\end{cases}\qquad j=\overline{0,\ k},$$

$$H_M=\sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)}p_{M+2|\varkappa|-2r},$$

$$M>0,$$

$$G_M=\sum_{r=1}^{2} q_r^{(M)}p_{2|\varkappa|-r+1},$$

$$q_1^{(M)}=\begin{cases}1, & M=0,\\ 0, & M\neq 0,\end{cases}$$

$$q_2^{(M)}=\begin{cases}0,5\,, & M=1,\\ 0, & M\neq 1.\end{cases}$$

От (3.3.22) придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n}\sigma_j^{(k)}c_{k-|\varkappa|}=f_j,\qquad j=n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|\,,$$

из которой обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|}$, $c_{n-|\varkappa|-1},\ \ldots\ ,\ c_0$

$$c_{n-|\varkappa|}=\frac{f_n}{\sigma_n^{(n)}},$$

$$c_{n-|\varkappa|-l}=\frac{1}{\sigma_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l}-\sum_{j=1}^{l}c_{n-|\varkappa|-l+j}\sigma_{n-l}^{(n-l+j)}\right],\qquad l=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-|\varkappa|.$$

Заметим, что здесь и далее не все уравнения, вытекающие из (3.3.22), используются для нахождения c_j.

Схема 3.3.6. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.2), $u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем разыскивать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} T_{k-|\varkappa|}(x), \tag{3.3.23}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.23) в (3.3.20), с учетом формулы (3.2.10) получаем при $-1 < x < 1$

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[A\, Z(x)\, T_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, T_{k-|\varkappa|}(t) \frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[\mu_0^{(k)} T_0(x) + \mu_1^{(k)} T_1(x) + \ldots + \mu_k^{(k)} T_k(x) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j\, T_j(x) + q_0 T_0(x), \tag{3.3.24}$$

$$h_j\, \mu_j^{(k)} = 0,5\, G_{k-|\varkappa|+j} + \begin{cases} 0,5\ G_{k-|\varkappa|-j} + H_{k-|\varkappa|-j}, & k-j > |\varkappa|, \\ 0,5\, G_0, & k-j = |\varkappa|, \\ 0,5\, G_{-k+|\varkappa|+j}, & k-j < |\varkappa|, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)}\, p_{M+2|\varkappa|-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{2} q_r^{(M)}\, p_{3-r},$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$q_2^{(M)} = \begin{cases} 0,5\,, & M = 1, \\ 0, & M \neq 1. \end{cases}$$

От (3.3.24) придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \mu_j^{(k)} c_{k-|\varkappa|} = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|,$$

из которой обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|}$, $c_{n-|\varkappa|-1}, \; \ldots \;, \; c_0$

$$c_{n-|\varkappa|} = \frac{f_n}{\mu_n^{(n)}},$$

$$c_{n-|\varkappa|-l} = \frac{1}{\mu_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-|\varkappa|-l+j} \mu_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1, \; 2, \; \ldots \;, \; n - |\varkappa|.$$

Схема 3.3.7. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.3), $u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем разыскивать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} T_{k-|\varkappa|}(x), \tag{3.3.25}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.25) в (3.3.20), с учетом формулы (3.2.8) получаем

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[A\, Z(x)\, T_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t)\, T_{k-|\varkappa|}(t) \frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[\delta_0^{(k)} U_0(x) + \delta_1^{(k)} U_1(x) + \ldots + \delta_k^{(k)} U_k(x) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j\, U_j(x) + q_0 U_0(x), \qquad -1 < x < 1, \tag{3.3.26}$$

$$\delta_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+1} + \begin{cases} G_{k-|\varkappa|-j-1} + 2\, H_{k-|\varkappa|-j-1}, & k - j > |\varkappa| + 1, \\ H_0, & k - j = |\varkappa| + 1, \\ -G_{j+|\varkappa|+1-k}, & k - j \leqslant |\varkappa|, \end{cases} \quad j = \overline{0, \; k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{[\frac{M}{2}]} a_r^{(M)}\, p_{M+2|\varkappa|+1-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{2} d_r^{(M)}\, p_{3-r},$$

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases}$$

$$d_2^{(N)} = \begin{cases} -0,25\,, & N = 2, \\ 0, & N \neq 2, \end{cases}$$

От (3.3.26) придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \delta_j^{(k)} c_{k-|\varkappa|} = f_j, \qquad j = n, \; n-1, \; \ldots \;, \; |\varkappa|\,,$$

из которой обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|}$, $c_{n-|\varkappa|-1}$, … , c_0

$$c_{n-|\varkappa|} = \frac{f_n}{\delta_n^{(n)}},$$

$$c_{n-|\varkappa|-l} = \frac{1}{\delta_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-|\varkappa|-l+j} \delta_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-|\varkappa|.$$

Схема 3.3.8. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.2), $u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем разыскивать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} U_{k-|\varkappa|}(x), \tag{3.3.27}$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.27) в (3.3.20), с учетом формулы (3.2.9) получаем при $-1 < x < 1$

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[A\, Z(x)\, U_{k-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, U_{k-|\varkappa|}(t) \frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} \left[\beta_0^{(k)} T_0(x) + \beta_1^{(k)} T_1(x) + \ldots + \beta_k^{(k)} T_k(x) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j\, T_j(x) + q_0 T_0(x), \tag{3.3.28}$$

$$h_j \beta_j^{(k)} = \begin{cases} 0,5\,, & j = k, \\ H_{k-j}, & k \geqslant j+1, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{l=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} p_{M+2|\varkappa|-1-2l}\, r_l^{(M)},$$

$$r_l^{(M)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(M)}, & l < \left[\frac{M}{2}\right], \\ 1 & l \geqslant \left[\frac{M}{2}\right]. \end{cases}$$

От (3.3.28) придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \beta_j^{(k)} c_{k-|\varkappa|} = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|\,,$$

из которой обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|}$, $c_{n-|\varkappa|-1}$, ... , c_0

$$c_{n-|\varkappa|} = \frac{f_n}{\beta_n^{(n)}},$$

$$c_{n-|\varkappa|-l} = \frac{1}{\beta_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-|\varkappa|-l+j} \beta_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-|\varkappa|.$$

3.3.3. Решение характеристического уравнения в классах $h(-1),\ h(1)$ $(\varkappa = 0)$

Приближенное решение уравнения (3.3.1) в заданных классах функций найдем как решение уравнения

$$A\,Z(x)\,u_n(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B\,Z(t)\,u_n(t)\frac{dt}{t-x} = f_n(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3.3.29}$$

где $f_n(x)$ – некоторый интерполяционный многочлен.

Получим следующие схемы.

Схема 3.3.9. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $u_n(x)$ будем искать в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\,U_k(x), \tag{3.3.30}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.30) в (3.3.29), получаем

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[A\,Z(x)\,U_k(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B\,Z(t)\,U_k(t)\frac{dt}{t-x} \right] = f_n(x), \quad -1 < x < 1. \tag{3.3.31}$$

Учитывая (3.2.4), из (3.3.31) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[\rho_0^{(k)} U_0(x) + \rho_1^{(k)} U_1(x) + \cdots + \rho_k^{(k)} U_k(x) \right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\,U_j(x), \qquad -1 < x < 1.$$

Отсюда для определения c_0, c_1, ... , c_n получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \rho_j^{(k)} c_k = f_j, \quad \rho_j^{(j)} \neq 0, \quad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \tag{3.3.32}$$

$$\rho_j^{(k)} = 2\, H_{k-j} + q_1^{(k-j)}, \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0, \\ 0, & M = 0, \end{cases}$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0. \end{cases}$$

Решение системы (3.3.32):

$$c_n = \frac{f_n}{\rho_n^{(n)}},$$

$$c_{n-l} = \frac{1}{\rho_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-l+j}\, \rho_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n.$$

Схема 3.3.10. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $u_n(x)$ будем искать в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, T_k(x), \tag{3.3.33}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.33) в (3.3.29), получаем

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[A\, Z(x)\, T_k(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, T_k(t) \frac{dt}{t-x} \right] = f_n(x), \quad -1 < x < 1. \tag{3.3.34}$$

Учитывая (3.2.5), из (3.3.34) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[\gamma_0^{(k)} T_0(x) + \gamma_1^{(k)} T_1(x) + \cdots + \gamma_k^{(k)} T_k(x) \right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\, T_j(x), \qquad -1 < x < 1.$$

Отсюда для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,\ c_n$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \gamma_j^{(k)} c_k = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \tag{3.3.35}$$

$$h_j \gamma_j^{(k)} = 0,5\, (q_1^{(k-j)} + q_1^{(k+j)}) + H_{k-j},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$H_N = \begin{cases} 0, & N = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_r^{(N-1)}\, p_{N-2r+\varkappa}, & N > 0. \end{cases}$$

Решение системы (3.3.35):

$$c_n = \frac{f_n}{\gamma_n^{(n)}},$$

$$c_{n-l} = \frac{1}{\gamma_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-l+j} \gamma_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n.$$

Схема 3.3.11. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $u_n(x)$ будем искать в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, U_k(x), \tag{3.3.36}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.36) в (3.3.29), получаем

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[A\, Z(x)\, U_k(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, U_k(t) \frac{dt}{t-x} \right] = f_n(x),\ -1 < x < 1. \tag{3.3.37}$$

Учитывая (3.2.6), из (3.3.37) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[\eta_0^{(k)} T_0(x) + \eta_1^{(k)} T_1(x) + \cdots + \eta_k^{(k)} T_k(x) \right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\, T_j(x), \qquad -1 < x < 1.$$

Отсюда для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,\ c_n$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \eta_j^{(k)} c_k = f_j, \qquad j = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \tag{3.3.38}$$

$$h_j \eta_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{[\frac{k-j}{2}]} r_l^{(k+\varkappa-j+1)} p_{k+\varkappa-j-2l},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}]. \end{cases}$$

Решение системы (3.3.38) определяется формулами:

$$c_n = \frac{f_n}{\eta_n^{(n)}},$$

$$c_{n-l} = \frac{1}{\eta_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-l+j} \eta_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n.$$

Схема 3.3.12. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $u_n(x)$ будем искать в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, T_k(x), \tag{3.3.39}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (3.3.39) в (3.3.29), получаем

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[A\, Z(x)\, T_k(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B\, Z(t)\, T_k(t) \frac{dt}{t-x} \right] = f_n(x), \ -1 < x < 1. \tag{3.3.40}$$

Учитывая (3.2.3), из (3.3.40) находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[\alpha_0^{(k)} U_0(x) + \alpha_1^{(k)} U_1(x) + \cdots + \alpha_k^{(k)} U_k(x) \right] = \sum_{j=0}^{n} f_j\, U_j(x), \qquad -1 < x < 1.$$

Отсюда для определения $c_0, \ c_1, \ \ldots \ , \ c_n$ получаем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \alpha_j^{(k)} c_k = f_j, \qquad j = n, \ n-1, \ \ldots \ , \ 0, \tag{3.3.41}$$

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k = 0, \\ 0,5\,, & j = k \neq 0, \\ p_{\varkappa+1}, & j = k-1, \\ 2H_{k-j-1} + d_1^{(k-j-1)}, & k-j-2 \geqslant 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0, \ k},$$

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{M} a_r^{(M)} p_{M+\varkappa+1-2r}.$$

Решение системы (3.3.41) определяется формулами

$$c_n = \frac{f_n}{\alpha_n^{(n)}},$$

$$c_{n-l} = \frac{1}{\alpha_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-l+j}\, \alpha_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1, \ 2, \ \ldots \ , \ n.$$

Обоснование вычислительных схем

Приведем теоремы, аналогичные теоремам 2.4.2, 2.4.3, характеризующие оценки порядка погрешностей построенных приближенных решений (3.3.4), (3.3.8), (3.3.12), (3.3.16), (3.3.21), (3.3.23), (3.3.25), (3.3.27), (3.3.30), (3.3.33), (3.3.36), (3.3.39).

Теорема 3.3.1. *Пусть функция* $f(x)$, *являющаяся правой частью уравнения* (3.3.2), *принадлежит классу* $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. *Пусть далее* $f(x)$ *аппроксимируется интерполяционным многочленом* (2.3.2) *или* (2.3.3) *по узлам Чебышева первого рода, функции* $u(x)$, $u_{n+\varkappa}(x)$ $(\varkappa = 1)$ *означают соответственно точное и приближенное решения задач* (3.1.12), (3.3.2), (3.3.3).

Тогда

$$\Big\| u(x) - u_{n+\varkappa}(x) \Big\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}.$$

Теорема 3.3.2. *Пусть функция* $f(x)$, *являющаяся правой частью уравнения* (3.3.2), *принадлежит классу* $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. *Пусть далее* $f(x)$ *аппроксимируется интерполяционным многочленом* (2.3.2) *или* (2.3.3) *по узлам Чебышева первого рода, функции* $u(x)$, $u_{n-|\varkappa|}(x)(\varkappa = -1)$ *означают соответственно точное и приближенное решения уравнений* (3.1.1), (3.3.20).

Тогда

$$\Big\| Z(x) \Big[u(x) - u_{n-|\varkappa|}(x) \Big] \Big\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}.$$

Теорема 3.3.3. *Пусть функция* $f(x)$, *являющаяся правой частью уравнения* (3.3.2), *принадлежит классу* $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. *Пусть далее* $f(x)$ *аппроксимируется интерполяционным многочленом* (2.3.2) *или* (2.3.3) *по узлам Чебышева первого рода, функции* $u(x)$, $u_n(x)(\varkappa = 0)$ *означают соответственно точное и приближенное решения уравнений* (3.1.1), (3.3.29).

Тогда

$$\Big\| Z(x) \Big[u(x) - u_n(x) \Big] \Big\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}.$$

3.4. Приближенное решение полного СИУ с постоянными коэффициентами

Построим теперь приближенное решение полного сингулярного интегрального уравнения (3.1.4) при условии (3.1.5), а именно

$$K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1,$$

$$K^0(u(x);\, x) = A\, Z(x)\, u(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t)\, u(t)\frac{dt}{t-x},$$

$$k(u(x);\, x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2-b^2} k(x,\, t)\, u(t) dt,$$

используя полученные алгоритмы для приближенного решения характеристического уравнения, указав, как и в случае характеристического уравнения, несколько разных алгоритмов.

При построении вычислительных схем снова будем использовать интерполяционные многочлены по узлам Чебышева первого рода (2.3.2), (2.3.3), (2.4.1), (2.4.2), а также переменные, описанные выше.

Напомним следующие равенства [30], которые мы будем использовать в дальнейшем:

$$\begin{aligned}
&2\, U_n(x)\, T_m(x) = U_{n+m}(x) + U_{n-m}(x),\\
&U_m(x) = -U_{-(m+2)}(x),\\
&U_{-1}(x) = 0,\\
&2\, T_n(x)\, T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x),\\
&T_{-m}(x) = T_m(x).
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

3.4.1. Решение полного уравнения в классе $h(0)(\varkappa = 1)$

Приближенное решение задачи

$$\begin{gathered}
K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1,\\
\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t)\, u(t) dt = \alpha_0,
\end{gathered} \tag{3.4.2}$$

определим как решение задачи

$$\begin{gathered}
K^0(u_{n+\varkappa}(x);\; x) + k(u_{n+\varkappa}(x);\; x) = f_n(x), \quad -1 < x < 1,\\
\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t)\, u_{n+\varkappa}(t) dt = \alpha_0,
\end{gathered} \tag{3.4.3}$$

где

$$K^0(u_{n+\varkappa}(x);\ x) = A\,Z(x)\,u_{n+\varkappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)u_{n+\varkappa}(t)\frac{dt}{t-x},$$

$$k(u_{n+\varkappa}(x);\ x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2-b^2}k_{n,n}(x,\ t)u_{n+\varkappa}(t)dt,$$

$f_n(x)$, $k_{n,n}(x,\ t)$ и $u_{n+\varkappa}(x)$ – некоторые многочлены, которые будем однозначно определять при построении вычислительных схем, α_0 – заданное число.

По аналогии с характеристическим уравнением построим вычислительные схемы, используя для характеристического оператора соответствующие схемы 3.3.1 – 3.3.12.

Схема 3.4.1. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $k_{n,n}(x,\ t)$ определяется (2.4.2), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\,U_k(x),$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

На тех же основаниях, что и в случае характеристического уравнения (см. схему 3.3.1), от задачи (3.4.3) приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения $c_0, c_1,\ \dots\ ,\ c_{n+\varkappa}$, имеющей вид

$$\begin{gathered}\sum_{k=m+\varkappa}^{n+\varkappa}\rho_m^{(k-\varkappa)}c_k + \sum_{k=0}^{n+\varkappa}\Omega_{mk}\,c_k = f_m,\\ m = n,\ n-1,\ \dots\ ,\ 0,\\ \sum_{k=0}^{n+\varkappa} I_k\,c_k = \alpha_0,\end{gathered} \tag{3.4.4}$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\rho_j^{(k)} = 2H_{k+\varkappa-j},\quad j=\overline{0,\ k},$$

$$H_M = \begin{cases}\sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)}p_{M-2r}, & M>0,\\ 0, & M=0,\end{cases}$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2-b^2}U_k(t)T_j(t)dt,$$

$$I_k = H_{k+1}.$$

Упрощение функций Ω_{mk} выполним, используя (3.4.1) и (2.1.13):

$$\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} b\,Z(t)\Big(U_{k+j}(t) + U_{k-j}(t)\Big)dt =$$

$$= -\frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big[X(z)\,\Big(U_{k+j}(z) + U_{k-j}(z)\Big)\Big].$$

Таким образом

$$\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj}\Big(H^*_{k+j} + H^*_{k-j}\Big),$$

$$H^*_M = \begin{cases} H_{M+1}, & M \geqslant 0, \\ -H_{-M-1}, & M < 0, \end{cases}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

Схема 3.4.2. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\,T_k(x),$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,$ $c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m}^{n} \gamma_m^{(k)} c_{k+\varkappa} + \sum_{k=0}^{n+\varkappa} \Omega_{mk}\,c_k = f_m, \qquad\qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \\ &\sum_{k=0}^{n+\varkappa} I_k\,c_k = \alpha_0, \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$h_j \gamma_j^{(k)} = H_{k+\varkappa-j},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \begin{cases} 0, & M = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)}\,p_{M-2r}, & M > 0, \end{cases}$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2-b^2} T_k(t) T_j(t) dt,$$

$$I_k = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} p_{k+\varkappa-2m}\, a_m^{(k)}.$$

Упрощение функций Ω_{mk} выполним, используя (3.4.1) и (2.1.13)

$$\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} b\, Z(t) \Big(T_{k+j}(t) + T_{k-j}(t)\Big) dt =$$
$$= -\frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \operatorname*{Res}_{z=\infty} \Big[X(z)\,\Big(T_{k+j}(z) + T_{k-j}(z)\Big)\Big].$$

Таким образом,

$$\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \Big(H^0_{k+j} + H^0_{|k-j|}\Big),$$
$$H^0_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} a_r^{(M)} p_{M-2r+\varkappa},$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Схема 3.4.3. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, U_k(x),$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,$ $c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$\begin{gathered} \sum_{k=m}^{n} \eta_m^{(k)} c_{k+\varkappa} + \sum_{k=0}^{n+\varkappa} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \\ m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \\ \sum_{k=0}^{n+\varkappa} I_k\, c_k = \alpha_0, \end{gathered} \tag{3.4.6}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$
\begin{aligned}
& h_j \eta_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{[\frac{k-j}{2}]} r_l^{(k+\varkappa-j+1)} p_{k+\varkappa-j-2l}, \\
& h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k}, \\
& r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}], \end{cases} \\
& H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0, \\ 0, & M = 0, \end{cases} \\
& \Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2 - b^2} U_k(t) T_j(t) dt, \\
& I_k = H_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Здесь, используя вычисление Ω_{mk} в схеме 3.4.1, имеем

$$
\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2 - b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \Big(H^*_{k+j} + H^*_{k-j} \Big),
$$

$$
H^*_M = \begin{cases} H_{M+1}, & M \geqslant 0, \\ -H_{-M-1}, & M < 0, \end{cases}
$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Схема 3.4.4. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.2), $u_{n+\varkappa}(x)$ будем искать в виде

$$
u_{n+\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k\, T_k(x),
$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,\ c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=m}^{n} \alpha_m^{(k)} c_{k+\varkappa} + \sum_{k=0}^{n+\varkappa} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \\
& \sum_{k=0}^{n+\varkappa} I_k\, c_k = \alpha_0,
\end{aligned}
\tag{3.4.7}
$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 2H_{k+\varkappa-j-1}, & k+\varkappa-j-2 \geqslant 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{M} a_r^{(M)} p_{M+\varkappa-2r},$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2-b^2} T_k(t) T_j(t) dt,$$

$$I_k = H_k.$$

Здесь, используя вычисление Ω_{mk} в схеме 3.4.2, имеем

$$\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \Big(H_{k+j} + H_{|k-j|} \Big),$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

3.4.2. Решение полного уравнения в классе $h(-1,\ 1)$

Приближенное решение уравнения

$$K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1$$

в случае $\varkappa = -1$ будем находить из уравнения

$$A\,Z(x)\,u_{n-|\varkappa|}(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B\,Z(t)\, \frac{u_{n-|\varkappa|}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2-b^2} k_{n,n}(x,\, t)\, u_{n-|\varkappa|}(t) dt =$$
$$= f_n(x) + Q, \quad -1 < x < 1,$$

где $f_n(x)$, $u_{n-|\varkappa|}(x)$, $k_{n,n}(x,\, t)$ – некоторые многочлены, Q – число, которое определим так, чтобы обеспечивалось следующее условие разрешимости уравнения:

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{b}{Z(t)} \left(f_n(t) + Q - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(\tau)}{a^2-b^2} k_{n,n}(t,\tau) u_{n-|\varkappa|}(\tau) d\tau \right) dt = 0,$$

т. е.

$$Q = -\left(\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{b}{Z(t)} dt \right)^{-1} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{b}{Z(t)} \left(f_n(t) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(\tau) k_{n,n}(t,\tau)}{a^2-b^2} u_{n-|\varkappa|}(\tau) d\tau \right) dt.$$

Используя (2.1.13), несложно вычислить в явном виде входящие сюда интегралы.

Схема 3.4.5. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $k_{n,n}(x,\, t)$ определяется (2.4.2), $u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} U_{k-|\varkappa|}(x),$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система для определения c_k, $\quad k = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n - |\varkappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \sigma_m^{(k)} c_{k-|\varkappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} \Omega^*_{mk} c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|\,, \tag{3.4.8}$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\sigma_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+2} + \begin{cases} G_0, & j = k - |\varkappa|, \\ G_{j-k+|\varkappa|}, & j > k - |\varkappa|, \\ 2H_{k-|\varkappa|-j} + G_{k-|\varkappa|-j}, & j < k - |\varkappa|, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M+2|\varkappa|-2r} & M > 0, \\ 0, & M = 0, \end{cases}$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{2} q_r^{(M)} p_{2|\varkappa|-r+1},$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$q_2^{(M)} = \begin{cases} 0,5\,, & M = 1, \\ 0, & M \neq 1, \end{cases}$$

$$\Omega^*_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2 - b^2} U_k(t)\, T_j(t) dt = \frac{1}{2\, b\, (a^2 - b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \Big(H^*_{k+j} + H^*_{k-j} \Big),$$

$$H^*_M = \begin{cases} H_{M+1}, & M \geqslant 0, \\ -H_{-M-1}, & M < 0, \end{cases}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

Заметим, что здесь и далее не все уравнения, вытекающие из системы, используются для нахождения c_k.

Схема 3.4.6. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1), $u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x)=\sum_{k=|\varkappa|}^{n}c_{k-|\varkappa|}T_{k-|\varkappa|}(x),$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система для определения c_k, $k=0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-|\varkappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n}\mu_m^{(k)}c_{k-|\varkappa|}+\sum_{k=0}^{n-|\varkappa|}\Omega^*_{mk}c_k=f_m,\qquad m=n,\ n-1,\ \dots\ ,\ |\varkappa|\,,\tag{3.4.9}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$h_j\,\mu_j^{(k)}=0,5\,G_{k-|\varkappa|+j}+\begin{cases}0,5\ G_{k-|\varkappa|-j}+H_{k-|\varkappa|-j}, & k-j>|\varkappa|,\\ 0,5\,G_0, & k-j=|\varkappa|,\\ 0,5\,G_{-k+|\varkappa|+j}, & k-j<|\varkappa|,\end{cases}$$

$$h_j=\begin{cases}0,5\,, & j\neq 0,\\ 1, & j=0,\end{cases}\qquad j=\overline{0,\ k},$$

$$H_M=\sum_{r=0}^{[\frac{M-1}{2}]}b_r^{(M-1)}\,p_{M+2|\varkappa|-2r},$$

$$G_M=\sum_{r=1}^{2}q_r^{(M)}\,p_{3-r},$$

$$q_1^{(M)}=\begin{cases}1, & M=0,\\ 0, & M\neq 0,\end{cases}$$

$$q_2^{(M)}=\begin{cases}0,5\,, & M=1,\\ 0, & M\neq 1,\end{cases}$$

$$\Omega^*_{mk}=\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2-b^2}T_k(t)\,T_j(t)dt=\frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)}\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\Big(H^0_{k+j}+H^0_{|k-j|}\Big),$$

$$H^0_M=\sum_{r=0}^{[M/2]}a_r^{(M)}p_{M-2r+2|\varkappa|+1},$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Схема 3.4.7. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.3), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.2), $u_{n-|\varkappa|}(x)$ будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x)=\sum_{k=|\varkappa|}^{n}c_{k-|\varkappa|}T_{k-|\varkappa|}(x),$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система для определения c_k, $\quad k=0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-|\varkappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \delta_m^{(k)} c_{k-|\varkappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} \Omega_{mk}^{*} c_k = f_m, \qquad m=n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|, \tag{3.4.10}$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\delta_j^{(k)} = -G_{k-|\varkappa|+j+1} + \begin{cases} G_{k-|\varkappa|-j-1} + 2\,H_{k-|\varkappa|-j-1}, & k-j>|\varkappa|+1, \\ H_0, & k-j=|\varkappa|+1, \quad j=\overline{0,\ k}, \\ -G_{j+|\varkappa|+1-k}, & k-j\leqslant|\varkappa|, \end{cases}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{[\frac{M}{2}]} a_r^{(M)}\, p_{M+2|\varkappa|+1-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{2} d_r^{(M)}\, p_{3-r},$$

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N=1, \\ 0, & N\neq 1, \end{cases}$$

$$d_2^{(N)} = \begin{cases} -0,25\,, & N=2, \\ 0, & N\neq 2, \end{cases}$$

$$\Omega_{mk}^{*} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2-b^2} T_k(t)\, T_j(t)dt = \frac{1}{2\,b\,(a^2-b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj}(H_{k+j}+H_{|k-j|}),$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

Схема 3.4.8. Пусть $f_n(x)$ определяется формулой (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1), будем искать в виде

$$u_{n-|\varkappa|}(x) = \sum_{k=|\varkappa|}^{n} c_{k-|\varkappa|} U_{k-|\varkappa|}(x),$$

где $c_{k-|\varkappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система для определения c_k, $\quad k=0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-|\varkappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \beta_m^{(k)} c_{k-|\varkappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} \Omega_{mk}^{*} c_k = f_m, \qquad m=n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ |\varkappa|, \tag{3.4.11}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$h_j \beta_j^{(k)} = \begin{cases} 0,5\,, & j = k, \\ H^0_{k-j}, & k \geqslant j+1, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,\ k},$$

$$H^0_M = \sum_{l=0}^{[M/2]} p_{M+2|\varkappa|-1-2l}\, r_l^{(M)},$$

$$r_l^{(M)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(M)}, & l < \left[\frac{M}{2}\right], \\ 1 & l \geqslant \left[\frac{M}{2}\right], \end{cases}$$

$$\Omega^*_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2 - b^2} U_k(t)\, T_j(t) dt = \frac{1}{2\, b\, (a^2 - b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} (H^*_{k+j} + H^*_{k-j}),$$

$$H^*_M = \begin{cases} H_{M+1}, & M \geqslant 0, \\ -H_{-M-1}, & M < 0, \end{cases} \qquad H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0, \\ 0, & M = 0, \end{cases}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

3.4.3. Решение полного уравнения в классах $h(-1)$, $h(1)$ ($\varkappa = 0$)

Приближенное решение уравнения

$$K^0(u(x);\, x) + k(u(x);\, x) = f(x), \quad -1 < x < 1$$

определим как решение уравнения

$$K^0(u_n(x); x) + k(u_n(x); x) = f_n(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3.4.12}$$

где

$$K^0(u_n(x); x) = A\, Z(x)\, u_n(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} B\, Z(t) u_n(t) \frac{dt}{t - x},$$

$$k(u_n(x); x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2 - b^2} k_{n,n}(x,\, t) u_n(t) dt,$$

$f_n(x)$, $k_{n,n}(x,\, t)$ и $u_n(x)$ – некоторые многочлены, которые будем однозначно определять при построении вычислительных схем.

По аналогии с характеристическим уравнением, используя различные способы интерполирования функций $f_n(x)$, $k_{n,n}(x,\,t)$, построим следующие вычислительные схемы.

Схема 3.4.9. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.2), $u_n(x)$ будем искать в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, U_k(x),$$

c_k – числа, подлежащие определению.

На тех же основаниях, что и в случае характеристического уравнения, от задачи (3.4.3) приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,\ c_n$, имеющей вид

$$\sum_{k=m}^{n} \rho_m^{(k)} c_k + \sum_{k=0}^{n} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \tag{3.4.13}$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$\rho_j^{(k)} = 2H_{k-j} + q_1^{(k-j)}, \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0, \\ 0, & M = 0, \end{cases}$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2 - b^2} U_k(t) T_j(t) dt = \frac{1}{2\,b\,(a^2 - b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \Big(H^*_{k+j} + H^*_{k-j} \Big),$$

$$H^*_M = \begin{cases} H_{M+1}, & M \geqslant 0, \\ -H_{-M-1}, & M < 0, \end{cases}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

Схема 3.4.10. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.1), $u_n(x)$ будем искать в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, T_k(x),$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,$ $c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \gamma_m^{(k)} c_k + \sum_{k=0}^{n} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \tag{3.4.14}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$h_j \gamma_j^{(k)} = 0,5\,(q_1^{(k-j)} + q_1^{(k+j)}) + H_{k-j},$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases}$$

$$H_N = \begin{cases} 0, & N = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{[\frac{N-1}{2}]} b_r^{(N-1)}\, p_{N-2r}, & N > 0, \end{cases}$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2 - b^2} T_k(t) T_j(t) dt$$

или

$$\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2 - b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \Big(H_{k+j}^0 + H_{|k-j|}^0 \Big),$$

$$H_M^0 = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} a_r^{(M)} p_{M-2r+1},$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Схема 3.4.11. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.2), $k_{n,n}(x,\ t)$ определяется (2.4.1), $u_n(x)$ будем искать в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, U_k(x),$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,$ $c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \eta_m^{(k)} c_k + \sum_{k=0}^{n} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \tag{3.4.15}$$

где f_m определены в (2.3.2),

$$
\begin{aligned}
&h_j \eta_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{[\frac{k-j}{2}]} r_l^{(k-j+1)} p_{k-j-2l},\\
&h_j = \begin{cases} 0,5\,, & j > 0,\\ 1, & j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},\\
&r_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}],\\ 1, & l \geqslant [\frac{N}{2}], \end{cases}\\
&\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2 - b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \Big(H_{k+j}^{*} + H_{k-j}^{*} \Big),\\
&H_M^{*} = \begin{cases} H_{M+1}, & M \geqslant 0,\\ -H_{-M-1}, & M < 0, \end{cases}\\
&H_M = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{[\frac{M-1}{2}]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0,\\ 0, & M = 0, \end{cases}
\end{aligned}
$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1).

Схема 3.4.12. Пусть $f_n(x)$ определяется (2.3.3), $k_{n,n}(x,\,t)$ определяется (2.4.2), $u_n(x)$ будем искать в виде

$$
u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, T_k(x),
$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система линейных алгебраических уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,$ $c_{n+\varkappa}$ имеет вид

$$
\sum_{k=m}^{n} \alpha_m^{(k)} c_k + \sum_{k=0}^{n} \Omega_{mk}\, c_k = f_m, \qquad m = n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 0, \tag{3.4.16}
$$

где f_m определены в (2.3.3),

$$
\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k = 0,\\ 0,5\,, & j = k \neq 0,\\ p_{\varkappa+1}, & j = k-1,\\ 2H_{k-j-1} + d_1^{(k-j-1)}, & k-j-2 \geqslant 0, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k},
$$

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} a_r^{(M)} p_{M+1-2r},$$

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2 - b^2} T_k(t) T_j(t) dt$$

или

$$\Omega_{mk} = \frac{1}{2\,b\,(a^2 - b^2)} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \Big(H_{k+j} + H_{|k-j|} \Big),$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2).

Обоснование вычислительных схем

Имеют место аналоги теоремы 2.4.2, 2.4.3, доказывающие, в данном частном случае сингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами, разрешимость систем линейных алгебраических уравнений (3.4.4) – (3.4.16) и характеризующие порядки погрешностей построенных приближенных решений.

Теорема 3.4.1. *Пусть уравнение* (3.4.2) *удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение $\varphi(x)$ *ищется в классе* $h(0)$ $(\varkappa = 1)$*;*
2) $a^2 - b^2 \neq 0$, $f(x)$, $k(x,\, t)$ *принадлежат классу* $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ (*вторая по обеим переменным*)*;*
3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $k(x,\, t)$ *взяты соответственно многочлены:* $f_n(x)$, *определяемый* (2.3.3) *или* (2.3.2)*;* $k_{n,n}(x,\, t)$, *определяемый* (2.4.2) *или* (2.4.1)*;*
4) однородное уравнение (2.1.4) *неразрешимо.*

Тогда при достаточно больших n системы (3.4.4)*–*(3.4.7) *разрешимы и имеет место оценка*

$$\Big\| u(x) - u_{n+\varkappa}(x) \Big\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}.$$

Теорема 3.4.2. *Пусть уравнение* (3.4.2) *удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение $\varphi(x)$ *ищется в классе* $h(-1,\ 1)$ $(\varkappa = -1)$*;*
2) $a^2 - b^2 \neq 0$, $f(x)$, $k(x,\, t)$ *принадлежат классу* $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ (*вторая по обеим переменным*)*;*
3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $k(x,\, t)$ *взяты соответственно многочлены:* $f_n(x)$, *определяемый* (2.3.3) *или* (2.3.2); $k_{n,n}(x,\, t)$, *определяемый* (2.4.2) *или* (2.4.1);
4) однородное уравнение (2.1.4) *неразрешимо.*

Тогда при достаточно больших n системы (3.4.8)*–*(3.4.11) *разрешимы и имеет место оценка*

$$\Big\| Z(x) \Big[u(x) - u_{n-|\varkappa|}(x) \Big] \Big\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}.$$

Теорема 3.4.3. *Пусть уравнение* (3.4.2) *удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение $\varphi(x)$ *ищется в классе* $h(-1)$ *или* $h(1)$ $(\varkappa = 0)$*;*
2) $a^2 - b^2 \neq 0$, $f(x)$, $k(x,\, t)$ *принадлежат классу* $W^r\, H^{\mu}$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ (*вторая по обеим переменным);*
3) индекс $\varkappa$ *характеристического оператора* K^0 *равен единице;*
4) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $k(x,\, t)$ *взяты соответственно многочлены:* $f_n(x)$, *определяемый* (2.3.3) *или* (2.3.2); $k_{n,n}(x,\, t)$, *определяемый* (2.4.2) *или* (2.4.1);
5) однородное уравнение (2.1.4) *неразрешимо.*

Тогда при достаточно больших n *системы* (3.4.12) – (3.4.16) *разрешимы и имеет место оценка*

$$\left\| Z(x) \Big[u(x) - u_n(x) \Big] \right\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}.$$

3.5. Приближенное решение СИУ первого рода

Рассмотрим далее полное сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,\,t)\varphi(t)dt=f(x),\ -1<x<1. \tag{3.5.1}$$

3.5.1. Приближенное решение в классе $h(0)$

Пусть решение уравнения (3.5.1) ищется в классе $\varphi(x)\in h(0)$ и поставлено условие, обеспечивающее единственность решения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt=\alpha_0. \tag{3.5.2}$$

После перехода к новой неизвестной функции

$$\varphi(x)=\frac{v(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

задача (3.5.1), (3.5.2) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$v(x)+\int_{-1}^{1}N(x,\,t)v(t)dt=F(x), \tag{3.5.3}$$

в котором

$$N(x,\,t)=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,k(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x},$$

$$F(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,f(t)\frac{dt}{t-x}+\alpha_0.$$

Если однородное уравнение, соответствующее (3.5.3), неразрешимо, то для любой функции $f(x)\in H(\mu)$ существует единственное решение задачи (3.5.1), (3.5.2) в классе функций $\varphi(x)\in h(0)$.

Приближенное решение задачи (3.5.1), (3.5.2) будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,v_{n+1}(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,k_{n,n}(x,\,t)\,v_{n+1}(t)dt=f_n(x),\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,v_{n+1}(t)dt=\alpha_0,\qquad |x|<1,
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

где

$$v_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k T_k(x), \tag{3.5.5}$$

c_k – числа, подлежащие определению,

$$k_{n,n}(x,\, t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} k^*_{mj} T_j(t), \tag{3.5.6}$$

$$k^*_{mj} = \frac{\vartheta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} k(x_l, x_r) \Big(T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l) \Big) \right],$$

$$\vartheta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0,\ n-2}, \\ 0, & m = n-1,\ n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2}\pi, \qquad k = \overline{1,\ n+1},$$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k U_k(x), \tag{3.5.7}$$

$$f_k = G_k - \delta_k G_{k+2},$$

$$G_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j)\, T_k(t_j),$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = \overline{0,\ n-2}, \\ 0, & k = n-1,\ n, \end{cases}$$

$$t_j = \cos \frac{2j-1}{2n+2}\pi, \qquad j = \overline{1,\ n+1}.$$

Используя (1.1.1), (3.5.5)–(3.5.7), из (3.5.4) получим

$$\sum_{p=0}^{n+1} c_p\, U_{p-1}(x) + \sum_{p=0}^{n} U_p(x) \sum_{k=0}^{n+1} c_k \left(\sum_{l=0}^{n} k^*_{p\,l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)\, T_l(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) = \sum_{p=0}^{n} f_p\, U_p(x),$$

$$\sum_{p=0}^{n+1} c_p \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_p(t) dt = \alpha_0.$$

Вычисляя интегралы в последней системе и приравнивая коэффициенты при $U_p(x)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных c_p, $p = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n+1$:

$$\begin{aligned} & c_{p+1} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k\, \rho_{p,k} = f_p, \quad p = \overline{0,\ n}, \\ & c_0 = 2\,\alpha_0, \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

$$\rho_{p,k} = \begin{cases} 0,5\, k^*_{p\,0}, & k = 0, \\ 0,25\, k^*_{p\,k}, & 0 < k \leqslant n, \\ 0, & k = n+1. \end{cases}$$

Окончательно приближенное решение задачи (3.5.4) имеет вид

$$\varphi_n(x) = \frac{v_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.5.9}$$

3.5.2. Приближенное решение в классе $h(-1,\ 1)$

Пусть решение уравнения (3.5.1) ищется в классе $\varphi(x) \in h(-1,\ 1)$ и выполняется необходимое и достаточное условие его разрешимости:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k(t,\tau)\,\varphi(\tau)d\tau dt. \tag{3.5.10}$$

Пусть далее $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}\, v(x)$.

Перейдем в (3.5.1) к новой неизвестной функции $v(x)$, являющейся соответственно решением уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\; v(t)\frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\; k(x,\ t)\; v(t)dt = f(x),\ -1 < x < 1, \tag{3.5.11}$$

для которого выполняются условия разрешимости:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-t^2}} k(t,\tau)\,v(\tau)\,d\tau dt.$$

Уравнение (3.5.11) эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) + \int\limits_{-1}^{1} N(x,\ t)\varphi(t)dt = F(x), \tag{3.5.12}$$

в котором

$$N(x,\ t) = -\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} k(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - x},$$

$$F(x) = -\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)\frac{dt}{t-x}.$$

Если однородное уравнение соответствующее (3.5.12) неразрешимо, тогда для любой функции $f(x) \in H(\mu)$, удовлетворяющей условию (3.5.10), существует единственное решение уравнения (3.5.1) в классе функций $\varphi(x) \in h(-1,\ 1)$.

Приближенное решение уравнения (3.5.1) будем искать как точное решение следующего уравнения:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,k_{n,n}(x,\,t)\,v_{n-1}(t)dt=f_n(x)+\sigma,\quad -1<x<1, \tag{3.5.13}$$

в котором константа σ определяется из условия разрешимости уравнения (3.5.13)

$$\sigma=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}k_{n,n}(x,\,t)v_{n-1}(t)dt-f_n(x)\right)dx,$$

$$v_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kU_k(x), \tag{3.5.14}$$

c_k – числа, подлежащие определению,

$$k_{n,n}(x,\,t)=\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^{**}_{mj}T_j(t), \tag{3.5.15}$$

$$k^{**}_{mj}=\frac{\vartheta_m}{n+1}\sum_{r=1}^{n+1}T_m(t_r)\left(\frac{\vartheta_j}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}k(t_r,t_l)\,T_j(t_l)\right),\quad \vartheta_k=\begin{cases}1, & k=0,\\ 2, & k>0,\end{cases}$$

$$t_j=\cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi,\qquad j=\overline{1,\;n+1},$$

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_kT_k(x),\qquad f_k=\frac{\vartheta_k}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}f(t_j)\,T_k(t_j). \tag{3.5.16}$$

Используя (1.1.1), (3.5.14)–(3.5.16), из (3.5.13) имеем

$$-\sum_{p=0}^{n-1}c_p\,T_{p+1}(x)+\sum_{p=0}^{n}T_p(x)\sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(\sum_{l=0}^{n}k^{*}_{p\,l}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_k(t)\,T_l(t)dt\right)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}f_p\,T_p(x)+\sigma.$$

После упрощения $\sigma=\frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{n-1}k^{**}_{0,k}\,c_k+\frac{1}{4}k^{**}_{0,0}\,c_0-f_0.$

Вычисляя интегралы в последнем уравнении и приравнивая коэффициенты при $T_p(x)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных $c_p,\ p=\overline{0,\;n-1}$

$$
\begin{gathered}
- c_{p-1} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, s_{p,k} = f_p, \quad p = \overline{1,\ n}, \\
\sum_{k=1}^{n-2} c_k\, k^{**}_{0,\,k+2} = 0,
\end{gathered}
\tag{3.5.17}
$$

$$
s_{p,k} = \begin{cases} 0,5\, k^{**}_{p\,0}, & k = 0, \\ 0,25\, (k^{**}_{p\,k} - k^{**}_{p,\,k+2}), & 0 < k \leqslant n-2, \\ 0,25\, k^{**}_{p\,k}, & k = n-1. \end{cases}
$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (3.5.17), получим приближенное решение уравнения (3.5.1) в классе $h(-1,\ 1)$:

$$
\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2}\, v_{n-1}(x). \tag{3.5.18}
$$

Обоснование вычислительных схем

Имеют место аналоги теоремы 3.4.1, 3.4.2, доказывающие, в данном частном случае сингулярного интегрального уравнения первого рода, разрешимость систем линейных алгебраических уравнений (3.5.8), (3.5.17) и характеризующие порядки погрешностей построенных приближенных решений (3.5.9), (3.5.18).

Теорема 3.5.1. *Пусть уравнение* (3.5.1) *удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение $\varphi(x)$ ищется в классе $h(0)$ ($\varkappa = 1$);
2) $f(x)$, $k(x,\ t)$ принадлежат классу $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ (вторая по обеим переменным);
3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $k(x,\ t)$ взяты соответственно многочлены $f_n(x)$, определяемый (3.5.7), *и $k_{n,n}(x,\ t)$, определяемый* (3.5.6);
4) однородное уравнение (3.5.3) *неразрешимо. Тогда при достаточно больших n система* (3.5.8) *разрешима и имеет место оценка*

$$
\Big\| v(x) - v_{n+1}(x) \Big\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}.
$$

Теорема 3.5.2. *Пусть уравнение* (3.5.1) *удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение $\varphi(x)$ ищется в классе $h(-1,\ 1)$ ($\varkappa = -1$);
2) $f(x)$, $k(x,\ t)$ принадлежат классу $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ (вторая по обеим переменным);
3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $k(x,\ t)$ взяты соответственно многочлены $f_n(x)$, определяемый (3.5.16), *и $k_{n,n}(x,\ t)$, определяемый* (3.5.15);
4) однородное уравнение (3.5.12) *неразрешимо. Тогда при достаточно больших n система* (3.5.17) *разрешима и имеет место оценка*

$$
\Big\| \varphi(x) - \varphi_n(x) \Big\|_\infty \leqslant M \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}.
$$

Глава 4

СИУ первого рода со специальной правой частью

4.1. Разложение сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью

Пусть, как и ранее,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_k^{(n)} x^{n-2k},$$

$$a_0^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2^{n-1}, & n > 0, \end{cases} \quad a_{k+1}^{(n)} = -\frac{(n-2k-1)\,(n-2k)}{4(k+1)\,(n-k-1)}\, a_k^{(n)}, \tag{4.1.1}$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n\ \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_k^{(n-1)} x^{n-1-2k},$$

$$b_0^{(n-1)} = 2^{n-1}, \quad b_k^{(n-1)} = -\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{4k(n-k)}\, b_{k-1}^{(n-1)}, \tag{4.1.2}$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Укажем разложение сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью и ядром Коши

$$K^0(p\ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln \frac{1-t}{1+t}\, p(t) f(t) \frac{dt}{t-x}, \quad -1 < x < 1, \tag{4.1.3}$$

в виде линейной комбинации многочленов Чебышева первого и второго рода, где $p(x)$ имеет вид: $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\ \ |\alpha| = |\beta| = 0,5$.

Эти формулы дадут возможность построить вычислительные схемы приближенного решения простейшего сингулярного интегрального уравнения первого рода со специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}=\ln\frac{1-x}{1+x}f(x),\quad -1<x<1. \tag{4.1.4}$$

Здесь $f(x)$ – заданная функция, непрерывная по Гельдеру, $\varphi(t)$ – искомая.

С оператором (4.1.3) приходится иметь дело после обращения [26], [17] в разных классах функций уравнения (4.1.4).

4.1.1. Предварительные сведения

Для достижения поставленной цели нам придется иметь дело с многозначными функциями комплексной переменной

$$F_1(z)=\ln\frac{z-1}{z+1},\qquad F_2(z)=(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta},\ |\alpha|=|\beta|=0,5.$$

Определим значения функций для $|z|>1$ следующим образом:

$$F_1(z)=-\frac{2}{z}-\frac{2}{3z^3}-\cdots,\qquad F_2(z)=z^{\alpha+\beta}\left(1+\frac{\beta-\alpha}{z}+\cdots\right).$$

Значения этих функций на верхнем и нижнем берегах разреза по интервалу $(-1,\ 1)$ будут такими:

$$F_1^{\pm}(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}\pm\pi i,\qquad F_2^{\pm}(x)=e^{\pm\alpha\pi i}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

Приведем еще разложения этих функций в окрестности бесконечно удаленной точки, которыми мы воспользуемся в монографии.

$$\ln\frac{z-1}{z+1}=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)z^{2n+1}}, \tag{4.1.5}$$

$$(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}=z^{\alpha+\beta}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\beta}=z^{\alpha+\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{z^k}, \tag{4.1.6}$$

где

$$\begin{aligned}
\mu_k&=\sum_{j=0}^{k}g_j\,v_{k-j},\\
g_0&=v_0=1,\\
g_{j+1}&=g_j\frac{j-\alpha}{j+1},\\
v_{j+1}&=v_j\,\frac{\beta-j}{j+1},\quad j=0,\ 1,\ \ldots\ .
\end{aligned}$$

Лемма 4.1.1. *Пусть* α *и* β *таковы, что* $|\alpha| = |\beta| = 0,5$. *Для любого многочлена* $P_M(x)$ *степени* $M \geqslant 0$ *справедливо:*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,P_M(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\pi}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\ln\frac{z-1}{z+1}\,P_M(z)\right). \tag{4.1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим левую часть равенства (4.1.7). Вычислим этот интеграл на основании теории вычетов.

Пусть $\Lambda-$ замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\ 1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\left((\sigma-1)^{\alpha}(\sigma+1)^{\beta}\ln\frac{\sigma-1}{\sigma+1}P_M(\sigma)\right)d\sigma =$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\ln\frac{z-1}{z+1}\,P_M(z)\right).$$

Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,\ 1]$, преобразуем левую часть этого равенства и получим

$$\frac{e^{\alpha\pi i}}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}+\pi i\right)P_M(t)\,dt +$$

$$+\frac{e^{-\alpha\pi i}}{2\pi i}\int\limits_{1}^{-1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}-\pi i\right)P_M(t)\,dt =$$

$$= \frac{e^{\alpha\pi i}-e^{-\alpha\pi i}}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,P_M(t)\,dt +$$

$$+\frac{e^{\alpha\pi i}+e^{-\alpha\pi i}}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}(\pi i)\,P_M(t)\,dt =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,P_M(t)\,dt.$$

Отсюда приходим к равенству (4.1.7). □

Лемма 4.1.2. *Пусть* α *и* β *таковы, что* $|\alpha| = |\beta| = 0,5$. *При* $m \geqslant 0$ *для* $|x| < 1$ *имеет место следующее представление:*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,t^m\,\frac{dt}{t-x} = -P_{m+(\alpha+\beta)-1}(x)-\pi(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}x^m, \quad (4.1.8)$$

где при $m+(\alpha+\beta)\geqslant 1$ $\quad P_{m+(\alpha+\beta)-1}(z)$ *– многочлен степени* $m+(\alpha+\beta)-1$ *и тождественный нуль в противном случае.*

Доказательство. Используя интегральную формулу Коши, имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}(\zeta-1)^{\alpha}(\zeta+1)^{\beta}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\,\zeta^m\frac{d\zeta}{\zeta-z} =$$

$$= (z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\ln\frac{z-1}{z+1}z^m - G_0^{(m)}(z),$$

где Λ – замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\ 1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки, $z\notin[-1,\ 1]$, а $G_0^{(m)}(z)$ – главная часть на бесконечности функции

$$z^m(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\ln\frac{z-1}{z+1}.$$

Очевидно, что главная часть $G_0^{(m)}(z)$ при $m+(\alpha+\beta)\geqslant 1$ — многочлен $P_{m+(\alpha+\beta)-1}(z)$ степени $m+(\alpha+\beta)-1$ или тождественный нуль в противном случае.

Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,\ 1]$, получим

$$\Phi(z) = \frac{e^{\alpha\pi i}}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}+\pi i\right)t^m\,\frac{dt}{t-z} -$$

$$-\frac{e^{-\alpha\pi i}}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}-\pi i\right)\,t^m\frac{dt}{t-z} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\pi}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}t^m\,\frac{dt}{t-z} =$$

$$= (z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\ln\frac{z-1}{z+1}\,z^m - G_0^{(m)}(z)\,.$$

Применив формулы Сохоцкого-Племеля, вычислим сингулярный интеграл

$$\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}t^m\,\frac{dt}{t-z} = \Phi^+(x)+\Phi^-(x).$$

Так как

$$\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=e^{\alpha\pi i}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left(\ln\frac{1-x}{1+x}+\pi i\right)x^m-G_0^{(m)}(x)+$$

$$+e^{-\alpha\pi i}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left(\ln\frac{1-x}{1+x}-\pi i\right)x^m-G_0^{(m)}(x)=$$

$$=-2\pi\sin\alpha\pi\,(1-x)^\alpha(1+x)^\beta x^m-2G_0^{(m)}(x),$$

то

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\ln\frac{1-t}{1+t}t^m\,\frac{dt}{t-z}=$$

$$-\pi\sin\alpha\pi(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,x^m-G_0^{(m)}(x).$$

□

4.1.2. Разложение сингулярного интеграла по многочленам Чебышева второго рода

С учетом введенных в формулах (4.1.2), (4.1.6) переменных зададим следующие обозначения:

$$Q_M=\frac{1}{\sin\alpha\pi}\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{J}b_k^{(M)}c^{(1)}_{\left[\frac{M+\alpha+\beta}{2}\right]-k}, & M+\alpha+\beta-\text{четное},\\ 0, & M=-1,\\ \sum\limits_{k=0}^{L}b_k^{(M)}c^{(2)}_{\left[\frac{M-1+\alpha+\beta}{2}\right]-k}, & M+\alpha+\beta-\text{нечетное},\end{cases} \tag{4.1.9}$$

$$A_{jk}=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}(1-\tau)^\alpha(1+\tau)^\beta U_j(\tau)\,U_k(\tau)d\tau,\qquad 0\leqslant j\leqslant k+\alpha+\beta-1$$

при

$$J=\min\left\{\left[\frac{M}{2}\right],\ \left[\frac{M+\alpha+\beta}{2}\right]\right\},$$

$$L=\min\left\{\left[\frac{M}{2}\right],\ \left[\frac{M-1+\alpha+\beta}{2}\right]\right\},$$

$$c_p^{(1)}=\sum_{n=0}^{p}\frac{2\mu_{2n}}{2p-2n+1},$$

$$c_p^{(2)}=\sum_{n=0}^{p}\frac{2\mu_{2n+1}}{2p-2n+1},\qquad p=0,\ 1,\ \ldots.$$

Теорема 4.1.1. *Для $x \in (-1,\ 1)$ и α, β таких, что $|\alpha| = |\beta| = 0,5$, справедлива формула*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,U_k(t)\,\frac{dt}{t-x} =$$

$$= -\pi(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}U_k(x) + \sum_{j=0}^{k+\alpha+\beta-1}\gamma_j^{(k)}U_j(x), \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots\ , \tag{4.1.10}$$

$$\gamma_j^{(k)} = Q_{k-j-1} + Q_{k+j+1} + 2A_{jk}, \qquad j = \overline{0,\ k+\alpha+\beta-1}. \tag{4.1.11}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4.1.2. Если $k+\alpha+\beta < 1$, то формула (4.1.10) верна. При $k+\alpha+\beta \geqslant 1$ левая часть (4.1.10) содержит некоторый многочлен степени $k+\alpha+\beta-1$. Запишем его через многочлены Чебышева второго рода пока с неопределенными коэффициентами и вычислим их. Известно, что [54]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_j(t)\,U_p(t)dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ 0,5, & j = p, \end{cases} \qquad j,\ p = 0,\ \ldots\ ,\ k+\alpha+\beta-1,$$

тогда из (4.1.10) с учетом обозначений (4.1.9) находим

$$\frac{1}{2}\gamma_j^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\,U_j(\tau)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-\tau}\right)d\tau + A_{jk}. \tag{4.1.12}$$

Изменим в (4.1.12) порядок интегрирования, используем (1.1.1) и получим

$$\frac{1}{2}\gamma_j^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,U_k(t)\left(\frac{-1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}U_j(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}\right)dt + A_{jk} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,U_k(t)\,T_{j+1}(t)dt + A_{jk}.$$

Так как [30]

$$2\,U_k(t)\,T_{j+1}(t) = U_{k+j+1}(t) + U_{k-j-1}(t),$$

то

$$\frac{1}{2}\gamma_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\Big(U_{k-j-1}(t) + U_{k+j+1}(t)\Big)\ln\frac{1-t}{1+t}dt + A_{jk} =$$

$$= 0,5\Big(I_{k-j-1} + I_{k+j+1}\Big) + A_{jk}. \tag{4.1.13}$$

Чтобы вычислить интегралы в (4.1.13), учтем, что $U_{-1}(t) \equiv 0$, и воспользуемся результатами леммы 4.1.1, тогда при $M \geqslant -1$ имеем:

$$I_M = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} \ln\frac{1-t}{1+t}\, U_M(t)\, dt =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\alpha\pi} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\ln\dfrac{z-1}{z+1}\, U_M(z)\right), & M \geqslant 0, \\ 0, & M = -1. \end{cases}$$

Осталось подсчитать эти вычеты в явном виде. Поскольку при больших $|z|$ имеют место разложения (4.1.5), (4.1.6), то, принимая во внимание (4.1.2), с учетом обозначений (4.1.9) получим $I_M = Q_M$.

Таким образом, из (4.1.13) следует, что верно (4.1.10), (4.1.11). □

Рассмотрим еще одно разложение.

Зададим обозначения с учетом введенных ранее в (4.1.1), (4.1.6) переменных:

$$H_M = \frac{1}{\sin\alpha\pi}\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{J} a_k^{(M)} c^{(1)}_{\left[\frac{M+\alpha+\beta}{2}\right]-k}, & M+\alpha+\beta - \text{четное}, \\ \sum\limits_{k=0}^{L} a_k^{(M)} c^{(2)}_{\left[\frac{M-1+\alpha+\beta}{2}\right]-k}, & M+\alpha+\beta - \text{нечетное}, \end{cases} \tag{4.1.14}$$
$$B_{jk} = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-\tau^2}(1-\tau)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta} U_j(\tau)\, T_k(\tau) d\tau, \qquad 0 \leqslant j \leqslant k+\alpha+\beta-1,$$

при

$$J = \min\left\{\left[\frac{M}{2}\right],\ \left[\frac{M+\alpha+\beta}{2}\right]\right\},$$
$$L = \min\left\{\left[\frac{M}{2}\right],\ \left[\frac{M-1+\alpha+\beta}{2}\right]\right\},$$
$$c_p^{(1)} = \sum_{n=0}^{p} \frac{2\mu_{2n}}{2p-2n+1},$$
$$c_p^{(2)} = \sum_{n=0}^{p} \frac{2\mu_{2n+1}}{2p-2n+1}, \qquad p = 0,\ 1,\ \ldots .$$

Теорема 4.1.2. *Для $x \in (-1,\ 1)$ и $\alpha,\ \beta$ таких, что $|\alpha| = |\beta| = 0,5$, справедлива формула*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} \ln\frac{1-t}{1+t}\, T_k(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= -\pi(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}T_k(x) + \sum_{j=0}^{k+\alpha+\beta-1} \eta_j^{(k)} U_j(x), \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots\ , \tag{4.1.15}$$

$$\eta_j^{(k)} = \ H_{k-j-1} + H_{k+j+1} + 2B_{jk}, \qquad j = \overline{0,\ k+\alpha+\beta-1}. \tag{4.1.16}$$

Доказательство. Поступая, как и при доказательстве теоремы 4.1.1, получим из (4.1.15) с учетом (4.1.14):

$$\frac{1}{2}\eta_j^{(k)} =$$

$$= B_{jk} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-\tau^2}U_j(\tau)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-\tau}\right)d\tau. \tag{4.1.17}$$

Изменив в (4.1.17) порядок интегрирования и используя (1.1.1), имеем

$$\frac{1}{2}\eta_j^{(k)} = B_{jk}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\left(\frac{-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}U_j(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\,T_{j+1}(t)\,dt + B_{jk}.$$

Так как [30]

$$2\,T_k(t)\,T_{j+1}(t) = T_{k+j+1}(t) + T_{|k-j-1|}(t),$$

то

$$\frac{1}{2}\eta_j^{(k)} = B_{jk} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\Big(T_{|k-j-1|}(t) + T_{k+j+1}(t)\Big)dt =$$

$$= 0,5\Big(J_{|k-j-1|} + J_{k+j+1}\Big) + B_{jk}. \tag{4.1.18}$$

Далее воспользуемся результатами леммы 4.1.1. При $M \geqslant 0$ имеем:

$$J_M = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}T_M(t)\ln\frac{1-t}{1+t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\pi}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}T_M(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\right).$$

Осталось подсчитать эти вычеты в явном виде.

Поскольку при больших $|z|$ имеют место разложения (4.1.5), (4.1.6), то, принимая во внимание (4.1.1) с учетом обозначений (4.1.14) получим $J_M = \ H_M$.

Таким образом, из (4.1.18) следует, что верно (4.1.15), (4.1.16). □

4.1.3. Разложение сингулярного интеграла по многочленам Чебышева первого рода

Пусть в (4.1.3) $p(x) = \sqrt{1-x^2}$. Получим еще одно разложение (4.1.3) в виде линейной комбинации многочленов Чебышева первого рода.

Напомним разложение функции $\sqrt{z^2-1}$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\begin{aligned} \sqrt{z^2-1} &= z - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{q_p}{z^{2p+1}}, \\ q_0 &= 0,5, \\ q_{p+1} &= q_p \frac{2p+1}{2p+4}, \quad p = 0,\ 1,\ \ldots\ . \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

С учетом введенных в формулах (4.1.2), (4.1.19) переменных зададим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Q_M &= \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} b_k^{(M)} c_k^{(M)}, & M\text{—нечетное}, \\ 0, & M = -1 \text{ или } M\text{—четное}, \end{cases} \\ c_k^{(M)} &= \frac{1}{M-2k+2} - \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}-k} \frac{q_n}{M-2k-2n}, \\ A_M &= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} T_M(t)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-M^2}, & M\text{—четное}, \\ 0, & M\text{—нечетное}, \end{cases} \\ h_j &= \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0,5\ , & j > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Теорема 4.1.3. *Для* $x \in (-1,\ 1)$ *справедлива формула*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= -\pi\sqrt{1-x^2}\,T_k(x) + \alpha_0^{(k)} T_0(x) + \ldots + \alpha_k^{(k)} T_k(x), \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots\ , \tag{4.1.21}$$

где

$$h_j \alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & k+j\text{—нечетное}, \\ A_{k+j} + A_{k-j} + Q_{k-1-j} - Q_{k-1+j}, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad j = \overline{0,\ k}. \tag{4.1.22}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4.1.1. Левая часть (4.1.21) содержит некоторый многочлен степени k. Запишем его через многочлены Чебышева первого рода пока с неопределенными коэффициентами и вычислим их.

Известно [54], что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}T_j(t)\,T_p(t)dt=\begin{cases}0, & j\neq p,\\ 1, & j=p=0,\\ 0,5, & j=p>0,\end{cases}\qquad j,\ p=0,\ 1,\ \dots\ ,\ k,$$

тогда из (4.1.21), привлекая (1.1.1), с учетом (4.1.20) находим

$$h_j\alpha_j^{(k)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\,T_j(\tau)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\frac{dt}{t-\tau}\right)d\tau+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}T_j(\tau)\,T_k(\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\left(\frac{(-1)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_j(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{\tau-t}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\Big(T_{k-j}(t)+T_{k+j}(t)\Big)dt=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\,U_{j-1}(t)dt+\ A_{k+j}+A_{k-j}.$$

Так как

$$2\,U_{j-1}(t)\,T_k(t)=U_{j-1+k}(t)+U_{j-1-k}(t),$$
$$U_{-n-2}(t)=-U_n(t),$$

то

$$h_j\alpha_j^{(k)}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\Big(U_{k-1+j}(t)-U_{k-1-j}(t)\Big)dt+A_{k+j}+A_{k-j}=$$

$$=0,5\Big(I_{k-1-j}-I_{k-1+j}\Big)+A_{k+j}+A_{k-j}. \qquad (4.1.23)$$

Чтобы вычислить интегралы в (4.1.23), учтем, что $U_{-1}(t)\equiv 0$, и воспользуемся результатами леммы 4.1.1. При $M\geqslant -1$

$$I_M=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_M(t)\ln\frac{1-t}{1+t}dt=$$

$$=\begin{cases}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}U_M(z)\ln\dfrac{z-1}{z+1}\right), & M\text{—нечетное},\\ 0, & M=-1\ \text{ или }\ M\ \text{—четное},\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}d_{-1}^M, & M\text{—нечетное},\\ 0, & M=-1\ \text{ или }\ M\ \text{—четное}.\end{cases}$$

Осталось подсчитать эти вычеты в явном виде.

Поскольку при больших $|z|$ имеют место разложения (4.1.5), (4.1.19), то, принимая во внимание (4.1.2), с учетом обозначений (4.1.12) получим $I_M=2\,Q_M$.

Таким образом, из (4.1.23) следует, что верно (4.1.21), (4.1.22). □

4.2. Квазиспектральные соотношения для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью

На основании разложений сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, полученных в теоремах 4.1.1–4.1.3, используя возможности компьютерной алгебры систем компьютерной математики, удалось упростим их при некоторых значениях α, β .

В частности, получены следующие результаты.

Теорема 4.2.1. *Для* $x \in (-1,\ 1)$ *и* $k \geqslant 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}T_k(x) + {\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}}{}^{0}\alpha_j T_{k-2-2j}(x), \tag{4.2.1}$$

где

$$\alpha_j = -8\sum_{m=0}^{j}\frac{1}{2m+1}, \qquad j = \overline{0,\ \left[\frac{k-2}{2}\right]},$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}T_k(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}\beta_j\,U_{k-2-2j}(x), \tag{4.2.2}$$

где

$$\beta_j = \frac{-4}{2j+1}, \qquad j = \overline{0,\ \left[\frac{k-2}{2}\right]},$$

$${\sum_{j=0}^{m}}{}^{0}\rho_j T_{m-j} \overset{\mathrm{def}}{=} \rho_0 T_m + \rho_1 T_{m-1} + \cdots + \rho_{m-1}T_1 + \frac{1}{2}\rho_m T_0.$$

Доказательство. Истинность равенств (4.2.1), (4.2.2) проверим методом математической индукции.

При $k=0$ и $k=1$ на основании (4.1.8) с учетом того, что $T_0(x)=1,\ \ T_1(x)=x$ равенство (4.2.1) верно.

Пусть (4.2.1) верно для $k \leqslant n$, т. е. имеет место

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)\frac{dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x) + {\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}{}^{0}\alpha_j T_{n-2-2j}(x).$$

Покажем, что (4.2.1) справедливо и для $k = n+1$.

Поскольку на основании (1.2.2) при $n>0\quad T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$, то

$$I_{n+1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\Big(2\,t\,T_n(t) - T_{n-1}(t)\Big)\frac{dt}{t-x} = J_n + 2\,x\,I_n - I_{n-1},$$

где

$$J_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1-t}{1+t} T_n(t)dt.$$

Так как для n – четных $J_n = 0$, а для нечетных n на основании (4.1.7) $J_n = -\dfrac{4}{n}$, то, используя (1.2.2), получаем справедливость (4.2.1) для $k = n+1$.

Доказательство равенства (4.2.2) проводится аналогично с использованием при $n > 0$ соотношения (1.2.2): $U_{n+1}(x) = 2\,x\,U_n(x) - U_{n-1}(x)$. $\square$

Теорема 4.2.2. *Для $x \in (-1,\ 1)$ и $k \geqslant 0$ справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1-t}{1+t}\, U_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} U_k(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \gamma_j U_{k-2-2j}(x), \qquad (4.2.3)$$

где

$$\gamma_j = -8\sum_{m=0}^{j} \frac{1}{2m+1}, \qquad j = \overline{0,\ \left[\frac{k-2}{2}\right]},$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1-t}{1+t}\, U_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} U_k(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} {}^0\delta_j T_{k-2-2j}(x), \qquad (4.2.4)$$

где

$$\delta_j = -16\sum_{l=0}^{j} \frac{j+1-l}{2l+1}, \quad j = \overline{0,\ \left[\frac{k-2}{2}\right]}.$$

Доказательство. Истинность равенств (4.2.3), (4.2.4) докажем также методом математической индукции.

При $k = 0$ и $k = 1$ на основании (4.1.8) с учетом того, что $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2\,x$ равенство (4.2.3) верно.

Пусть (4.2.3) верно для $k \leqslant n$, т. е. имеет место

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1-t}{1+t}\, U_n(t)\frac{dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}\, U_n(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \beta_j U_{n-2-2j}(x).$$

Покажем, что (4.2.3) справедлива и для $k = n+1$. Используя (1.2.2) имеем

$$I_{n+1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1-t}{1+t}\Big(2\,t\,U_n(t) - U_{n-1}(t)\Big)\frac{dt}{t-x} = J_n + 2\,x\,I_n - I_{n-1},$$

где

$$J_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1-t}{1+t} U_n(t)dt.$$

Так как для n – четных $J_n = 0$, а для нечетных n на основании (4.1.7)

$$J_n = -8\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

то получаем справедливость (4.2.3) для $k = n + 1$.

Доказательство равенства (4.2.4) проводится аналогично. $\square$

Теорема 4.2.3. *Для $x \in (-1,\ 1)$ и $k \geqslant 0$ справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{T_k(t)dt}{t-x} = -\pi\sqrt{1-x^2}T_k(x) + \alpha_0 T_k(x) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}{}^{0}\alpha_j T_{k-2j}(x), \quad (4.2.5)$$

где

$$\alpha_0 = 2, \quad \alpha_j = \frac{-4}{4j^2-1}, \quad j = \overline{1, \left[\frac{k}{2}\right]},$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{1-x^2}T_k(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\beta_j^{(k)}U_{k-2j}(x), \qquad (4.2.6)$$

где

$$\beta_0^{(0)} = 2, \quad \beta_0^{(1)} = 1, \quad \beta_0^{(k)} = 1, \quad \beta_1^{(k)} = -\frac{5}{3},$$

$$\beta_j^{(k)} = \frac{8}{(2j-3)(4j^2-1)}, \qquad j = \overline{2, \left[\frac{k}{2}\right]}, \quad k \geqslant 2.$$

Доказательство. Истинность равенств (4.2.5), (4.2.6) проводится аналогично предыдущему с использованием равенства

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n(n-2)} - \dfrac{2}{n(n+2)}, & n \text{ — нечетное,} \\ 0, & n \text{ — четное.} \end{cases}$$

$\square$

Теорема 4.2.4. *Для $x \in (-1,\ 1)$ и $k \geqslant 0$ справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\,U_k(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= -\pi\sqrt{1-x^2}U_k(x) + \gamma_0 U_k(x) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\gamma_j U_{k-2j}(x), \qquad (4.2.7)$$

где

$$\gamma_0 = 2, \ \ \gamma_j = \frac{-4}{4j^2-1}, \ \ j = \overline{1, \left[\frac{k}{2}\right]},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\,U_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{1-x^2}U_k(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}{}^{0}\delta_j T_{k-2j}(x), \qquad (4.2.8)$$

где

$$\delta_j = \frac{4}{2j+1}, \qquad j = \overline{0, \left[\frac{k}{2}\right]}.$$

Доказательство. Верность равенств (4.2.7), (4.2.8) проверяется подобно предыдущему с использованием равенства

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}U_n(t)dt = \begin{cases} \dfrac{-4}{n(n+2)}, & n - \text{нечетное}, \\ 0, & n - \text{четное}. \end{cases}$$

□

Теорема 4.2.5. *Для* $x \in (-1,\ 1)$ *и* $k \geqslant 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\,\frac{1-t}{1+t}\,U_k(t)\,\frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,U_k(x) - 4\,U_{k-1}(x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{8}{2m+1}\,U_{k-2j}(x) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1}\right)U_{k-1-2j}(x) \qquad (4.2.9)$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\,\frac{1-t}{1+t}\,T_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,T_k(x) - 2\,U_{k-1}(x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{k-2j}(x) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{8\,j}{4j^2-1}U_{k-1-2j}(x). \qquad (4.2.10)$$

Доказательство. Истинность равенств (4.2.9), (4.2.10) доказывается как и ранее методом математической индукции с учетом того, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_n(t)dt = \begin{cases} -8\left(1+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}\right), & n - \text{нечетное}, \\ -8\left(1+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n+1}\right)+\dfrac{4}{n+1}, & n - \text{четное}, \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)dt = \begin{cases} -\dfrac{4}{n}, & n - \text{нечетное}, \\ -\dfrac{2}{n-1} - \dfrac{2}{n+1}, & n - \text{четное}. \end{cases}$$

$\square$

Теорема 4.2.6. *Для* $x \in (-1,\ 1)$ *и* $k \geqslant 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\,\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,T_k(x) + $$
$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^0\alpha_j T_{k-2-2j}(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^0\beta_j T_{k-1-2j}(x), \tag{4.2.11}$$
$$\alpha_j = \sum_{m=0}^{j}\frac{-8}{2m+1},\quad j \geqslant 0,$$
$$\beta_j = \alpha_j + \frac{4}{2j+1},\quad j \geqslant 0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\,\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,U_k(x) + $$
$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^0\delta_j T_{k-2-2j}(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^0\gamma_j T_{k-1-2j}(x), \tag{4.2.12}$$
$$\delta_j = \sum_{m=0}^{j}\frac{-16(j+1-m)}{2m+1},\quad j \geqslant 0,$$
$$\gamma_0 = -8,\qquad \gamma_j = \frac{\delta_{j-1}+\delta_j}{2},\quad j > 0.$$

Доказательство. Выполним под интегралом в левой части (4.2.11) преобразование:

$$\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} = \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1+T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Далее применим равенство

$$2\,T_1(t)\,T_k(t) = T_{k-1}(t) + T_{k+1}(t).$$

Затем используем (4.2.1).

После элементарных преобразований получим истинность равенства (4.2.11).

Доказательство истинности равенства (4.2.12) проводится аналогично с учетом (4.2.4). $\square$

Теорема 4.2.7. *Для* $x \in (-1,\ 1)$ *и* $k \geqslant 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\,\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,T_k(x) + 2\,U_{k-1}(x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{4}{2j-1} U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{8\,j}{4j^2-1} U_{k-1-2j}(x), \tag{4.2.13}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, U_k(x) + 4\,U_{k-1}(x) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{-8}{2m+1} U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \left(\sum_{m=0}^{j} \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1}\right) U_{k-1-2j}(x). \tag{4.2.14}$$

Доказательство. Истинность равенств (4.2.13), (4.2.14) проверяется методом математической индукции с учетом того, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ \ln \frac{1-t}{1+t}\ T_n(t)\ dt = \begin{cases} -\dfrac{4}{n}, & n\text{—нечетное}, \\[2ex] \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{2}{n+1}, & n\text{—четное}, \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ \ln \frac{1-t}{1+t}\ U_n(t)\ dt = \begin{cases} -8\left(1+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}\right), & n\text{—нечетное}, \\ 8\left(1+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{4}{n+1}, & n\text{—четное}. \end{cases}$$

□

Теорема 4.2.8. *Для $x \in (-1,\ 1)$ и $k \geqslant 0$ справедливы равенства*

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, T_k(x) + \\ + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} {}^{0}\alpha_j T_{k-2-2j}(x) - \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} {}^{0}\beta_j T_{k-1-2j}(x), \\ \alpha_j = \sum_{m=0}^{j} \frac{-8}{2m+1}, \quad j \geqslant 0, \\ \beta_j = \alpha_j + \frac{4}{2j+1}, \quad j \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4.2.15}$$

u

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,U_k(x) +$$

$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_j T_{k-2-2j}(x) - \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_j T_{k-1-2j}(x), \qquad (4.2.16)$$

$$\delta_j = \sum_{m=0}^{j}\frac{-16(j+1-m)}{2m+1}, \quad j \geqslant 0,$$

$$\gamma_0 = -8,\ \gamma_j = (\delta_{j-1}+\delta_j)/2, \quad j > 0.$$

Доказательство. Выполним под интегралом в левой части (4.2.15) преобразование веса:

$$\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

.

Далее применим равенство $2\,T_1(t)\,T_k(t) = T_{k-1}(t) + T_{k+1}(t)$.

Затем используем (4.2.1).

После элементарных преобразований получим истинность равенства (4.2.15).

Доказательство истинности равенства (4.2.16) проводится аналогично с учетом (4.2.4). □

4.3. Приближенное решение простейшего уравнения

Применим полученные разложения к построению приближенного решения уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,\,t)\varphi(t)dt=\ln\frac{1-x}{1+x}f(x)+g(x),\quad -1<x<1,\qquad(4.3.1)$$

вначале в случае, когда $k(x,\ t)\equiv 0$, т. е. рассмотрим простейшее уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}=\ln\frac{1-x}{1+x}f(x),\quad -1<x<1.\qquad(4.3.2)$$

4.3.1. Приближенное решение в классе $h(-1,\ 1)$

Известно [26], [17], что если ищется решение $\varphi(x)\in h(-1,\ 1)$, тогда при выполнении необходимого и достаточного условия

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \ln\frac{1-t}{1+t}\ f(t)dt=0$$

решение уравнения (4.3.2) определяется формулой

$$\varphi(x)=-\sqrt{1-x^2}\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \ln\frac{1-t}{1+t}\ f(t)\frac{dt}{t-x},\quad -1<x<1.\qquad(4.3.3)$$

Основываясь на разложениях (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4), построим четыре вычислительные схемы приближенного решения уравнения (4.3.2). Найдем его как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\frac{dt}{t-x}=\ln\frac{1-x}{1+x}\ f_n(x)+q,\quad -1<x<1,\qquad(4.3.4)$$

где $f_n(x)$ – некоторый интерполяционный многочлен степени n, аппроксимирующий функцию $f(x)$, а константа q определяется из условия разрешимости уравнения (4.3.4)

$$q=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \ln\frac{1-t}{1+t}\ f_n(t)dt$$

и вычисляется согласно (4.1.7).

Выполняя обращение интеграла (4.3.4) в заданном классе функций, получим

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\ln\frac{1-t}{1+t}\,f_n(t)\frac{dt}{t-x},\quad -1<x<1. \tag{4.3.5}$$

Используя (4.2.1) и учитывая (3.5.16), из (4.3.5) получим **схему 4.3.1**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{1-x^2}\sum_{j=0}^{n-2}{}^0\, T_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_k f_{n-j+2k}, \tag{4.3.6}$$

где

$$\alpha_k = -8\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{2m+1},\quad k=\overline{0,\left[\frac{n-2}{2}\right]}.$$

Используя (4.2.2) и (3.5.16), из (4.3.5) получим **схему 4.3.2**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{1-x^2}\sum_{j=0}^{n-2} U_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\beta_k f_{n-j+2k}, \tag{4.3.7}$$

где

$$\beta_k = \frac{-4}{2k+1},\qquad j=\overline{0,\left[\frac{n-2}{2}\right]}.$$

Используя (4.2.3) и (3.5.7), из (4.3.5) получим **схему 4.3.3**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{1-x^2}\sum_{j=0}^{n-2} U_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_k f_{n-j+2k}, \tag{4.3.8}$$

где

$$\gamma_k = -8\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{2m+1},\quad k=\overline{0,\left[\frac{n-2}{2}\right]}.$$

Используя (4.2.4) и (3.5.7), из (4.3.5) получим **схему 4.3.4**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{1-x^2}\sum_{j=0}^{n-2}{}^0 T_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\delta_k f_{n-j+2k}, \tag{4.3.9}$$

где

$$\delta_k = -16\sum_{l=0}^{k}\frac{k+1-l}{2l+1},\quad k=\overline{0,\left[\frac{n-2}{2}\right]}.$$

Обоснование вычислительных схем

Приведем оценки порядка погрешности приближенного решения (4.3.6)–(4.3.9).

На основании (4.3.3), (4.3.5), (3.5.16) и (3.5.7) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [56], получим следующую теорему.

Теорема 4.3.1. *Пусть функция $f(x)$, являющаяся правой частью уравнения (4.3.2), принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. Пусть далее $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (3.5.16) или (3.5.7) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (4.3.2), (4.3.4). Тогда*

$$\left\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\right\|_\infty \leqslant M_1 \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1).$$

Здесь константа M_1 не зависит от n.

4.3.2. Приближенное решение в классе $h(0)$

Построим приближенное решение уравнения (4.3.2) в классе $h(0)$.

Согласно [26], [17] искомое решение $\varphi(x) \in h(0)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \, \ln \frac{1-t}{1+t} \, f(t) \frac{dt}{t-x} + \gamma \right), \quad |x| < 1. \tag{4.3.10}$$

Здесь γ – произвольная постоянная, которая будет однозначно определена, если дополнить уравнение (4.3.2) условием

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t) dt = \alpha_0, \tag{4.3.11}$$

где α_0 – наперед заданное число. В этом случае $\gamma = \alpha_0$.

Построим вычислительные схемы приближенного решения уравнения (4.3.2) в классе $h(0)$, основываясь на разложениях (4.2.5)–(4.2.8).

Приближенное решение задачи (4.3.2), (4.3.11) найдем как точное решение следующей задачи

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} \, f_n(x), \quad -1 < x < 1, \tag{4.3.12}$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(t) \, dt = \alpha_0, \tag{4.3.13}$$

где $f_n(x)$ – некоторый (указанный ниже) многочлен степени n, аппроксимирующий функцию $f(x)$.

Решение задачи (4.3.12), (4.3.13) имеет вид

$$\varphi_n(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \, \ln \frac{1-t}{1+t} \, f_n(t) \, \frac{dt}{t-x} + \alpha_0 \right), \ |x| < 1. \tag{4.3.14}$$

Используя (4.2.5) и учитывая (3.5.16), из (4.3.14) получим **схему 4.3.5**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(2f_n(x) + \sum_{j=1}^{n-1} {}^0T_{n-1-j}(x) \sum_{k=1}^{\left[\frac{j+1}{2}\right]} \frac{4}{1-4k^2} f_{n-1-j+2k} + \alpha_0 \right). \tag{4.3.15}$$

Используя (4.2.6) и (3.5.16), из (4.3.14) получим **схему 4.3.6**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\sum_{j=0}^{n} U_{n-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \beta_k^{(j)} f_{n-j+2k} + \alpha_0 \right), \tag{4.3.16}$$

$$\beta_0^{(0)} = 2, \quad \beta_0^{(1)} = 1, \quad \beta_0^{(j)} = 1, \quad \beta_1^{(j)} = -\frac{5}{3},$$
$$\beta_k^{(j)} = \frac{8}{(2k-3)(4k^2-1)}, \quad k = \overline{2, \left[\frac{j}{2}\right]}, \qquad j = \overline{2, n}.$$

Используя (4.2.7) и (3.5.7), из (4.3.14) получим **схему 4.3.7**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\sum_{j=0}^{n} U_{n-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \gamma_k f_{n-j+2k} + \alpha_0 \right), \tag{4.3.17}$$

$$\gamma_0 = 2, \quad \gamma_k = \frac{-4}{4k^2-1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Используя (4.2.8) и (3.5.7), из (4.3.14) получим **схему 4.3.8**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\sum_{j=0}^{n} {}^0T_{n-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \delta_k f_{n-j+2k} + \alpha_0 \right), \tag{4.3.18}$$

$$\delta_k = \frac{4}{2k+1}, \quad k = \overline{0, \left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Обоснование вычислительных схем

Приведем оценки порядка погрешности приближенного решения (4.3.15)–(4.3.18).

Теорема 4.3.2. *Пусть функция $f(x)$, являющаяся правой частью уравнения (4.3.2), принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. Пусть далее $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (3.5.16) или (3.5.7) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$ означают соответственно точное и приближенное решения задач (4.3.2), (4.3.11) и (4.3.12), (4.3.13).*

Тогда

$$\sqrt{1-x^2} \left\| \varphi(x) - \varphi_n(x) \right\|_\infty \leqslant M_2 \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1).$$

Здесь константа M_2 не зависит от n.

4.3.3. Приближенное решение в классе $h(1)$

Построим приближенное решение уравнения (4.3.2) в классе $h(1)$.

Известно [26], [17], что искомое решение уравнения (4.3.2) $\varphi(x) \in h(1)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}f(t)\frac{dt}{t-x}\right), \quad -1 < x < 1. \tag{4.3.19}$$

Для приближенного решения уравнения (4.3.2) используем разложение функции $f(x)$ по полиномам Чебышева (3.5.16) или (3.5.7), в результате чего приходим к следующему уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(t)\frac{dt}{t-x} = \ln\frac{1-x}{1+x}\, f_n(x), \quad -1 < x < 1. \tag{4.3.20}$$

Согласно (4.3.19), решение уравнения (4.3.20) имеет вид

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\ln\frac{1-t}{1+t}\, f_n(t)\,\frac{dt}{t-x}\right), \quad -1 < x < 1. \tag{4.3.21}$$

Используя (3.5.16) и учитывая (4.2.10), из (4.3.21) получаем **схему 4.3.9**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{n-1}U_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_k\, f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^{n}U_{n-j}(x)\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\beta_k\, f_{n-j+2k}\right), \tag{4.3.22}$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} -2, & k = 0, \\ -8\dfrac{k}{4k^2-1}, & k = \overline{1, \left[\dfrac{n-1}{2}\right]}, \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{-4}{2k-1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Используя (3.5.7) и учитывая (4.2.9), из (4.3.21) получаем **схему 4.3.10**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{n-1}U_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\delta_k\, f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^{n}U_{n-j}(x)\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_k\, f_{n-j+2k}\right), \tag{4.3.23}$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} -4, & k = 0, \\ \sum\limits_{m=0}^{k} \dfrac{-8}{2m+1} + \dfrac{4}{2k+1}, & k = \overline{1, \left[\dfrac{n-1}{2}\right]}, \end{cases}$$

$$\gamma_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{-8}{2m+1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Используя (3.5.16) и учитывая (4.2.11), из (4.3.21) получаем **схему 4.3.11**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^0T_{n-2-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \alpha_k f_{n-j+2k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n-1} {}^0T_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \beta_k f_{n-j+2k} \right), \tag{4.3.24}$$

где

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{-8}{2m+1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

$$\beta_k = \alpha_k + \frac{4}{2k+1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]}.$$

Используя (3.5.7) и учитывая (4.2.12), из (4.3.21) получаем **схему 4.3.12**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^0T_{n-2-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \delta_k f_{n-j+2k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n-1} {}^0T_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \gamma_k f_{n-j+2k} \right), \tag{4.3.25}$$

где

$$\delta_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{-16(k+1-m)}{2m+1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

$$\gamma_0 = -8, \quad \gamma_k = \frac{\delta_{k-1} + \delta_k}{2}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]}.$$

Обоснование вычислительных схем

Приведем оценки порядка погрешности приближенного решения (4.3.22)–(4.3.25).

Теорема 4.3.3. *Пусть функция $f(x)$, являющаяся правой частью уравнения (4.3.2), принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. Пусть далее $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (3.5.16) или (3.5.7) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (4.3.2), (4.3.20) в классе $h(1)$.*

Тогда

$$\sqrt{1+x}\,\Big\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\Big\|_\infty \leqslant M_3 \frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}},\ x \in [-\delta,\ \delta] \subset (-1,\ 1).$$

Здесь константа M_3 не зависит от n.

4.3.4. Приближенное решение в классе $h(-1)$

Известно [26], [17], что искомое решение уравнения (4.3.2) $\varphi(x) \in h(-1)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\ln\frac{1-t}{1+t}\,f(t)\,\frac{dt}{t-x}\right), \quad -1<x<1. \tag{4.3.26}$$

Для приближенного решения уравнения (4.3.2) используем разложение функции $f(x)$ по полиномам Чебышева (3.5.16) или (3.5.7), в результате чего приходим к уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\frac{dt}{t-x} = \ln\frac{1-x}{1+x}\,f_n(x), \quad -1<x<1. \tag{4.3.27}$$

Приближенное решение в заданном классе получим из уравнения (4.3.27)

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\ln\frac{1-t}{1+t}\,f_n(t)\frac{dt}{t-x}\right), \quad -1<x<1. \tag{4.3.28}$$

Используя (3.5.16) и учитывая (4.2.13), из (4.3.28) получаем **схему 4.3.13**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\times$$
$$\times\left(\sum_{j=0}^{n-1}U_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_k\, f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^{n}U_{n-j}(x)\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\beta_k\, f_{n-j+2k}\right), \tag{4.3.29}$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} 2, & k=0,\\ 8\dfrac{k}{4k^2-1}, & k=\overline{1,\ \left[\dfrac{j-1}{2}\right]}, \end{cases}$$
$$\beta_k = \frac{-4}{2k-1}, \qquad k=\overline{1,\ \left[\frac{j}{2}\right]}.$$

Используя (3.5.7) и учитывая (4.2.14), из (4.3.28) получаем **схему 4.3.14**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{n-1} U_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \delta_k\, f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^{n} U_{n-j}(x) \sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \gamma_k\, f_{n-j+2k}\right), \qquad (4.3.30)$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} 4, & k = 0, \\ \sum\limits_{m=0}^{k} \dfrac{8}{2m+1} - \dfrac{4}{2\,k+1}, & k = \overline{1, \left[\dfrac{j-1}{2}\right]}, \end{cases}$$

$$\gamma_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{-8}{2m+1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{j}{2}\right]}.$$

Используя (3.5.16) и учитывая (4.2.15), из (4.3.28) получаем **схему 4.3.15**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^{0}T_{n-2-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \alpha_k\, f_{n-j+2k} - \sum_{j=0}^{n-1} {}^{0}T_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \beta_k\, f_{n-j+2k}\right), \qquad (4.3.31)$$

где

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{-8}{2m+1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

$$\beta_k = \alpha_k + \frac{4}{2k+1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]}.$$

Используя (3.5.7) и учитывая (4.2.12), из (4.3.28) получаем **схему 4.3.16**:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^{0}T_{n-2-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \delta_k\, f_{n-j+2k} - \sum_{j=0}^{n-1} {}^{0}T_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \gamma_k\, f_{n-j+2k}\right), \qquad (4.3.32)$$

где

$$\delta_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{-16(k+1-m)}{2m+1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

$$\gamma_0 = -8, \quad \gamma_k = \frac{\delta_{k-1} + \delta_k}{2}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]}.$$

Обоснование вычислительных схем

Приведем оценки порядка погрешности приближенного решения (4.3.29) – (4.3.32).

Теорема 4.3.4. *Пусть функция $f(x)$, являющаяся правой частью уравнения (4.3.2), принадлежит классу $W^r H^\mu,\ r \geqslant 0,\ 0 < \mu \leqslant 1$. Пусть далее $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (3.5.16) или (3.5.7) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x),\ \ \varphi_n(x)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (4.3.2), (4.3.27) в классе $h(-1)$.*

Тогда

$$\sqrt{1-x}\left\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right\|_\infty \leqslant M_4\frac{\ln^2 n}{n^{r+\mu}},\ x\in[-\delta,\ \delta]\subset(-1,\ 1).$$

Здесь константа M_4 не зависит от n.

4.4. Приближенное решение полного СИУ

4.4.1. Приближенное решение в классе $h(-1,\ 1)$

Рассмотрим далее полное уравнение (4.3.1). Сначала будем искать решение в классе $\varphi(x) \in h(-1,\ 1)$. Пусть выполняется необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (4.3.1):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1-t}{1+t}\, f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{k(t,\tau)\varphi(\tau)}{\sqrt{1-t^2}}\, d\tau dt. \qquad (4.4.1)$$

Решение уравнения (4.3.1) будем искать в виде

$$\varphi(x) = \phi(x) + \psi(x), \qquad (4.4.2)$$

где $\phi(x)$ – решение простейшего уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \phi(t)\frac{dt}{t-x} = \ln\frac{1-x}{1+x}\, f(x) + q, \quad -1 < x < 1, \qquad (4.4.3)$$

в котором константа q выбирается так, чтобы выполнялось условие разрешимости уравнения (4.4.3)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}\, f(t) + q\right) dt = 0,$$

т. е.

$$q = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}\, f(t)\right) dt, \qquad (4.4.4)$$

и решение уравнения (4.4.3) задается формулой

$$\phi(x) = -\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \ln\frac{1-t}{1+t}\, f(t)\frac{dt}{t-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Функция же $\psi(x) = \sqrt{1-x^2}\, v(x)$ – решение уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, v(t)\frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, k(x,\, t)\, v(t)dt = f_1(x),\ |x| < 1, \qquad (4.4.5)$$

где

$$f_1(x) = g(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} k(x,\, t)\, \phi(t)dt - q,$$

для которого выполняются условия разрешимости (константа q определена в (4.4.4)):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\Big(g(t)-q\Big)dt=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau dt.$$

Уравнение (4.4.5) эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\psi(x)+\int\limits_{-1}^{1}N(x,\,t)\psi(t)dt=F_1(x), \tag{4.4.6}$$

в котором

$$N(x,\,t)=-\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\,k(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x},$$

$$F_1(x)=-\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,f_1(t)\,\frac{dt}{t-x}.$$

Если однородное уравнение, соответствующее (4.4.6), неразрешимо, тогда для любых функций $f(x),\ g(x)\in H(\mu)$, удовлетворяющих условию (4.4.1), существует единственное решение уравнения (4.3.1) в классе функций $\varphi(x)\in h(-1,\ 1)$.

Приближенное решение уравнения (4.3.1) будем искать как точное решение двух следующих уравнений:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\phi_n(t)\frac{dt}{t-x}=\ln\frac{1-x}{1+x}\,f_n(x)+\rho,\quad -1<x<1, \tag{4.4.7}$$

где $f_n(x)$ определяется в (3.5.7), а константа ρ вычисляется из условия разрешимости уравнения (4.4.7):

$$\rho=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\ln\frac{1-t}{1+t}\,f_n(t)\,dt,$$

причем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\ln\frac{1-t}{1+t}\,f_n(t)\,dt=-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}f_n(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

и если использовать схему 4.3.3, т. е. формулу (4.3.8), то решение уравнения (4.4.7) дается формулой

$$\phi_n(x)=\pi f_n(x)-\sqrt{1-x^2}\sum_{j=0}^{n-2}U_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_k f_{n-j+2k}, \tag{4.4.8}$$

$$\gamma_k = -8\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{2m+1}, \quad k=\overline{0,\ \left[\frac{n-2}{2}\right]},$$

и уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,k_{n,n}(x,\,t)\,v_{n-1}(t)\,dt = F_n(x)+\sigma, \tag{4.4.9}$$

$$F_n(x) = g_n(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n}(x,\,t)\,\phi_n(t)\,dt, \quad |x|<1,$$

в котором константа σ определяется из условия разрешимости уравнения (4.4.9):

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,k_{n,n}(x,\,t)\,v_{n-1}(t)dt - F_n(x)\right)dx,$$

$$v_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}c_k U_k(x), \tag{4.4.10}$$

c_k – числа, подлежащие определению,

$$k_{n,n}(x,\,t) = \sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^{**}_{mj}T_j(t), \tag{4.4.11}$$

$$k^{**}_{mj} = \frac{\vartheta_m}{n+1}\sum_{r=1}^{n+1}T_m(t_r)\left[\frac{\vartheta_j}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}k(t_r,t_l)\,T_j(t_l)\right],$$

$$\vartheta_k = \begin{cases}1, & k=0,\\ 2, & k>0,\end{cases}$$

$$t_j = \cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi, \qquad j=\overline{1,\ n+1},$$

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n}g_k T_k(x), \tag{4.4.12}$$

$$g_k = \frac{\vartheta_k}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}g(t_j)\,T_k(t_j).$$

Используя (3.5.7), (4.4.8) и (4.4.11), упростим $F_n(x)$.
Имеем

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n}g_m T_m(x) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^{**}_{mj}T_j(t)\left(\pi\sum_{k=0}^{n}f_kU_k(t)-\sum_{j=0}^{n-2}\sqrt{1-t^2}U_{n-2-j}(t)A_j\right)dt,$$

$$A_j=\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_k\,f_{n-j+2k}.$$

Изменяя порядок суммирования и явно вычисляя некоторые интегралы, получим представление

$$F_n(x)=\sum_{p=0}^{n}F_p\,T_p(x),$$

где

$$F_p=g_p-\sum_{l=0}^{n}k^{**}_{p\,l}d_l,$$

$$d_l=\sum_{k=0}^{n}f_k\,\omega_{l,k}-r(l,j),$$

$$A^*_k=A_{n-2-k},\quad k=\overline{0,\ n-2},$$

$$r(l,j)=\begin{cases}0,5\,A^*_0, & l=0,\\ 0,25\,A^*_1, & l=1,\\ 0,25\,(A^*_l-A^*_{l-2}), & 2\leqslant l\leqslant n-2,\\ -0,25\,A^*_{l-2}, & l>n-2,\end{cases}$$

$$\omega_{l,k}=\begin{cases}0, & k+l-\text{нечетное},\\ \dfrac{1}{k-l+1}+\dfrac{1}{k+l+1}, & k+l-\text{четное}.\end{cases}$$

Используя (1.1.1), (4.4.10)–(4.4.12), упростим уравнение (4.4.9):

$$-\sum_{p=0}^{n-1}c_pT_{p+1}(x)+\sum_{p=0}^{n}T_p(x)\sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(\sum_{l=0}^{n}k^{**}_{p\,l}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_k(t)\,T_l(t)dt\right)=\sum_{p=0}^{n}F_pT_p(x).$$

Вычисляя явно интегралы и приравнивая коэффициенты при функции $T_p(x)$, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных c_p, $p=0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-1$:

$$\begin{aligned}-\,c_{p-1}+\sum_{k=0}^{n-1}c_k\,s_{p,k}&=F_p,\quad p=\overline{1,\ n},\\ \sum_{k=0}^{n-1}c_k\,s_{0,k}&=F_0+\sigma,\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

где

$$s_{p,k}=\begin{cases}0,5\,k^{**}_{p\,0}, & k=0,\\ 0,25\,(k^{**}_{p\,k}-k^{**}_{p,k+2}), & 0<k\leqslant n-2,\\ 0,25\,k^{**}_{p\,k}, & k=n-1.\end{cases}$$

Вычисляя (4.4.8), а затем решая систему линейных алгебраических уравнений (4.4.13), получим приближенное решение уравнения (4.3.1) в классе $h(-1,\ 1)$:

$$\varphi_n(x) = \phi_n(x) + \sqrt{1-x^2}\, v_{n-1}(x). \tag{4.4.14}$$

Обоснование вычислительной схемы

Теорема 4.4.1. *Пусть уравнение (4.3.1) удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение ищется в классе $h(-1,\ 1)$;
2) функции $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ *принадлежат классу* $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ *(последняя по обеим переменным);*
3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $g(x)$, $k(x,\ t)$ *взяты соответственно многочлены* $f_n(x)$, $g_n(x)$, $k_{n,n}(x,t)$, *определяемые* (3.5.7), (4.4.12), (4.4.11);
4) однородное уравнение (4.4.6) неразрешимо.

Тогда при достаточно больших n *система (4.4.13) разрешима и имеет место оценка*

$$\sqrt{1-x^2}\left\|v(x) - v_n(x)\right\|_\infty \leqslant M_5 \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta,\ \delta] \subset (-1,\ 1).$$

На основании теорем 4.3.4 и 4.4.1 для точного решения уравнения (4.3.1), определяемого (4.4.2), и приближенного решения (4.4.14) имеет место следующее утверждение.

Следствие 4.4.1. *Пусть выполняются условия теорем 4.3.4 и 4.4.1.*
Тогда при достаточно больших n *имеет место оценка*

$$\left\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\right\|_\infty \leqslant M_6 \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta,\ \delta] \subset (-1,\ 1).$$

Здесь константы M_5, M_6 не зависят от n.

4.4.2. Приближенное решение в классе $h(0)$

Пусть далее решение ищется в классе $\varphi(x) \in h(0)$.

Решение уравнения (4.3.1) при условии (4.3.11) будем искать в виде

$$\varphi(x) = \phi(x) + \psi(x), \tag{4.4.15}$$

где $\phi(x)$ решение задачи (4.3.2), (4.3.11) при $\alpha_0 = 0$, которое на основании предыдущего, дается формулой (4.3.10) с $\gamma = 0$, а $\psi(x) = \dfrac{v(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ – решение уравнения (4.3.1) с правой частью

$$f_1(x) = g(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} k(x,\ t)\,\phi(t)dt$$

и условием (4.3.11).

Последняя задача эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$v(x) + \int_{-1}^{1} N(x,\, t)\, v(t)\, dt = F_1(x), \tag{4.4.16}$$

в котором

$$N(x,\, t) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, k(\tau, t)\, \frac{d\tau}{\tau - x},$$

$$F_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, f_1(t)\, \frac{dt}{t-x} + \alpha_0.$$

Если однородное уравнение, соответствующее (4.4.16), неразрешимо, то для любых функций $f(x)$, $g(x) \in H(\mu)$ существует единственное решение задачи (4.3.1), (4.3.11) в классе функций $\varphi(x) \in h(0)$.

Приближенное решение задачи (4.3.1), (4.3.11) будем искать в виде комбинации решений двух следующих задач:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \phi_n(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x}\, f_n(x), \quad |x| < 1, \\ &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \phi_n(t) dt = 0, \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_{n+1}(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, k_{n,n}(x,\, t)\, v_{n+1}(t) dt = F_n(x), \\ &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, v_{n+1}(t)\, dt = \alpha_0, \qquad |x| < 1, \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

$$v_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k T_k(x), \tag{4.4.19}$$

c_k – числа, подлежащие определению.

Решение задачи (4.4.17) при использовании схемы 4.3.5, т. е. формулы (4.3.15), имеет вид

$$\phi_n(x) = \pi f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(2 f_n(x) + \sum_{j=1}^{n-1} {}^0T_{n-1-j}(x) \sum_{k=1}^{\left[\frac{j+1}{2}\right]} \alpha_k f_{n-1-j+2k} \right), \tag{4.4.20}$$

где

$$\alpha_k = \frac{-4}{4k^2-1}, \quad k = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}.$$

В уравнении (4.4.18)

$$F_n(x) = g_n(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} k_{n,n}(x, t)\phi_n(t)dt,$$

$$k_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} k^*_{mj} T_j(t), \tag{4.4.21}$$

где

$$k^*_{mj} = \frac{\vartheta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} k(x_l, x_r)\Big(T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)\Big)\right],$$

$$\vartheta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{1, n+1},$$

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k U_k(x), \tag{4.4.22}$$

где

$$g_k = G_k - \delta_k G_{k+2},$$

$$G_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} g(t_j)\, T_k(t_j),$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, n-2}, \\ 0, & k = n-1, n, \end{cases}$$

$$t_j = \cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Используя (3.5.16), (4.4.20) и (4.4.21), упростим $F_n(x)$:

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} g_m U_m(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} k^*_{mj} T_j(t) \times$$

$$\times \left[\pi \sum_{k=0}^{n} f_k T_k(t) - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(2\sum_{k=0}^{n} f_k T_k(t) + \sum_{k=0}^{n-1} {}^0T_{n-1-k}(t)\, b_k\right)\right] dt,$$

$$B_k = \sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \alpha_j f_{n-1-k+2j}, \qquad k = \overline{0,\ n-1},$$
$$\alpha_j = \frac{-4}{4j^2-1}, \qquad j = \overline{1,\ \left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Изменяя порядок суммирования, получаем представление

$$F_n(x) = \sum_{p=0}^{n} F_p U_p(x),$$
$$F_p = g_p - \sum_{l=0}^{n} k^*_{p\,l} d_l,$$
$$d_l = \sum_{k=0}^{n} f_k \omega_{l,k} - D_l \varepsilon(l),$$
$$\varepsilon(l) = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0,5\ , & l > 0, \end{cases}$$
$$D_k = \begin{cases} 0,5\, B_{n-1} + 2\, f_0, & k = 0, \\ B_{n-1-k} + 2\, f_k, & k = \overline{1,\ n-2}, \\ 2\, f_k, & k = n-1,\ n, \end{cases}$$
$$\omega_{l,k} = \begin{cases} 0, & k+l - \text{нечетное}, \\ \dfrac{1}{1-(l-k)^2} + \dfrac{1}{1-(l+k)^2}, & k+l - \text{четное}. \end{cases}$$

Используя (1.1.1), (4.4.19)–(4.4.22), из (4.4.18) получим

$$\sum_{p=0}^{n+1} c_p\, U_{p-1}(x) + \sum_{p=0}^{n} U_p(x) \sum_{k=0}^{n+1} c_k \left(\sum_{l=0}^{n} k^*_{p\,l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)\, T_l(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) = \sum_{p=0}^{n} F_p\, U_p(x),$$

$$\sum_{p=0}^{n+1} c_p \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, T_p(t) dt = \alpha_0.$$

Вычисляя интегралы в последнем выражении и приравнивая коэффициенты при $U_p(x)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных c_p, $p = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n+1$:

$$\begin{aligned} & c_{p+1} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k\, \rho_{p,k} = F_p, \quad p = \overline{0,\ n}, \\ & c_0 = 2\, \alpha_0, \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

где

$$\rho_{p,k} = \begin{cases} 0,5\ k^*_{p\,0}, & k = 0, \\ 0,25\ k^*_{p\,k}, & 0 < k \leqslant n, \\ 0, & k = n+1. \end{cases}$$

Окончательно приближенное решение задачи (4.4.17), (4.4.18) имеет вид

$$\varphi_n(x) = \phi_n(x) + \frac{v_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.4.24}$$

Обоснование вычислительной схемы

Теорема 4.4.2. *Пусть уравнение (4.3.1) удовлетворяет следующим условиям:*
1) решение ищется в классе $h(0)$;
2) функции $f(x)$, $g(x)$, $k(x,\, t)$ принадлежат классу $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ (последняя по обеим переменным);
3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $g(x)$, $k(x,\, t)$ взяты соответственно многочлены $f_n(x)$, $g_n(x)$, $k_{n,\,n}(x,\, t)$, определяемые (3.5.16), (4.4.22), (4.4.21);
4) однородное уравнение (4.4.16) неразрешимо.

Тогда при достаточно больших n система (4.4.23) разрешима и имеет место оценка

$$\left\| v(x) - v_n(x) \right\|_\infty \leqslant M_7 \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta,\ \delta] \subset (-1,\ 1).$$

На основании теорем 4.3.2 и 4.4.2 для точного решения уравнения (4.3.1), определяемого формулой (4.4.15), и приближенного решения (4.4.24) имеет место следующее

Следствие 4.4.2. *Пусть выполняются условия теорем 4.3.2 и 4.4.2.*
Тогда при достаточно больших n имеет место оценка

$$\sqrt{1-x^2} \left\| \varphi(x) - \varphi_n(x) \right\|_\infty \leqslant M_8 \frac{\ln^3 n}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta,\ \delta] \subset (-1,\ 1).$$

Здесь константы M_7, M_8 не зависят от n.

Глава 5

Сингулярные интегральные уравнения с кратными ядрами Коши

В данной главе строятся вычислительные схемы численного решения сингулярных интегральных уравнений с кратными ядрами Коши:

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(t_1,t_2)\frac{dt_1dt_2}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)}+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k(x_1,x_2,t_1,t_2)\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2=f(x_1,x_2),\qquad (x_1,x_2)\in D^2,$$

$D^2=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$, $k(x_1,x_2,t_1,t_2)$ и $f(x_1,x_2)$ – заданные функции класса Гельдера по каждой переменной, $\varphi(t_1,t_2)$ – искомая функция и

$$\frac{1}{\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$
$$+\frac{1}{\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3=f(x_1,x_2,x_3),\ (x_1,x_2,x_3)\in D^3,$$

$D^3=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$, $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$ и $f(x_1,x_2,x_3)$ – заданные функции класса Гельдера по каждой переменной, $\varphi(t_1,t_2,t_3)$ – искомая функция.

Как и в одномерном случае [26], решение таких уравнений зависит от класса функций, в котором оно ищется, но в отличие от одномерного случая общее решение может содержать произвольные функции.

Вопросы обратимости простейших так называемых характеристических операторов с мультипликативным ядром Коши изучались в [23], [57].

Вопросам постановки задачи для нахождения единственного решения посвящены работы [24], [33], [36], [58].

5.1. Сингулярные интегральные уравнения с двукратными ядрами Коши

5.1.1. Класс неограниченных функций

Вначале рассмотрим простейшее уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}=f(x,y),\qquad -1<x,y<1. \tag{5.1.1}$$

Будем искать решение $\varphi(x,y)$ в классе $h(0)\times h(0)$. Это означает, что $\varphi(x,y)$ в любой замкнутой области из D^2, не содержащей граничных точек, принадлежит классу H, а вблизи граничных точек представима в виде

$$\varphi(x,y)=(x+1)^{\alpha_1}(x-1)^{\beta_1}(y+1)^{\alpha_2}(y-1)^{\beta_2}\varphi_0(x,y),$$

здесь $\varphi_0(x,y)\in H,\ -1<\alpha_j,\ \beta_j<0,\quad j=1,2.$

Присоединим к (5.1.1) условия:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,y)dt=g_1(y),\ -1<y<1,\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(x,\tau)d\tau=g_2(x),\ -1<x<1,\end{gathered} \tag{5.1.2}$$

где $g_1(y),g_2(x)-$ заданные функции класса $h(0)$, удовлетворяющие условиям согласования

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}g_1(\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}g_2(t)dt=A. \tag{5.1.3}$$

Согласно [36] решение задачи (5.1.1) – (5.1.3) дается формулой

$$\varphi(x,y)=\frac{R(f;x,y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}+G(x,y), \tag{5.1.4}$$

где

$$\begin{gathered}R(f;x,y)=-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}{(t-x)(\tau-y)}f(t,\tau)dtd\tau,\\ G(x,y)=\frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}}-\frac{A}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.\end{gathered} \tag{5.1.5}$$

Рассмотрим далее полное сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k(x,y,t,\tau)\varphi(t,\tau)dtd\tau=f(x,y), \quad -1<x,y<1, \tag{5.1.6}$$

где f, $k-$ заданные функции своих аргументов, непрерывные по Гельдеру, $\varphi-$ искомая функция.

Присоединим к (5.1.6) условия (5.1.2), (5.1.3).

Полагая

$$\varphi(x,y)=\varphi^*(x,y)+\psi(x,y),$$

от задачи (5.1.6), (5.1.2), (5.1.3) придем к двум задачам:

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}=0, \qquad -1<x,y<1, \tag{5.1.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(t,y)dt=g_1(y), \quad -1<y<1,\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(x,\tau)d\tau=g_2(x), \quad -1<x<1,\\ \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(t,\tau)=A,\end{gathered} \tag{5.1.8}$$

и

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\psi(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k(x,y,t,\tau)\psi(t,\tau)dtd\tau=f^*(x,y),\\ f^*(x,y)=f(x,y)-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k(x,y,t,\tau)\varphi^*(t,\tau)dtd\tau, \qquad -1<x,y<1,\end{gathered} \tag{5.1.9}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\psi(t,y)dt=0,\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\psi(x,\tau)d\tau=0, \ -1<x,y<1.\end{gathered} \tag{5.1.10}$$

Решение задачи (5.1.7), (5.1.8) определяется формулой

$$\varphi^*(x,y) = G(x,y),$$

а задача (5.1.9), (5.1.10) эквивалентна в смысле разрешимости интегральному уравнению Фредгольма

$$u(x,y) + \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} N(x,y,t,\tau)\, u(t,\tau) dt d\tau = F(x,y), \tag{5.1.11}$$

где

$$N(x,y,t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}\,\frac{1}{\pi^4}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}\frac{k(\xi,\eta,t,\tau)d\xi d\eta}{(\xi-x)(\eta-y)},$$

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)} f^*(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{(\xi-x)(\eta-y)},$$

$$\psi(x,y) = \frac{u(x,y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

Замечание 5.1.1. *Можно проверить, что условия (5.1.10) для решения $u(x,y)$ уравнения (5.1.11) соблюдаются.*

Пусть однородное уравнение (5.1.11) неразрешимо (имеет только нулевое решение). Тогда решение неоднородного уравнения (5.1.11) дается формулой

$$u(x,y) = F(x,y) - \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\Gamma(x,y,\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

где $\Gamma(x,y,\xi,\eta)$ – резольвента ядра $N(x,y,t,\tau)$.

Теорема 5.1.1. *Пусть функции $k(x,y,t,\tau)$, $f(x,y)$, входящие в уравнение (5.1.6), принадлежат классу Гельдера (по всем переменным), функции $g_1(y)$, $g_2(x)$, входящие в (5.1.8), принадлежат классу $h(0)$. Пусть далее однородное уравнение Фредгольма (5.1.11) неразрешимо.*

Тогда задача (5.1.6), (5.1.2), (5.1.3) имеет единственное решение, представимое в виде

$$\varphi(x,y) = \frac{u(x,y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} + \frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}},$$

где $u(x,y)$ – решение уравнения (5.1.11).

Введем обозначения:

$$h_1(y) = \sqrt{1-y^2}\, g_1(y),$$
$$h_2(x) = \sqrt{1-x^2}\, g_2(x),$$
$$G^*(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\, G(x,y),$$

т. е.

$$G^*(x,y) = h_1(y) + h_2(x) - A.$$

Построим приближенное решение задачи (5.1.9), (5.1.10). С этой целью функции нескольких переменных k, f, h_1, h_2, h_3 аппроксимируем интерполяционными многочленами, построенными по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-2, \\ 0, & m = n-1,\ n, \end{cases} \qquad \delta_p = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 2, & p \geqslant 1, \end{cases} \\
&x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n+1, \\
&y_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n+1, \\
&t_q = \cos\frac{2q-1}{2n+4}\pi,\ q = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n+2, \\
&\tau_q = \cos\frac{2q-1}{2n+4}\pi,\ q = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n+2.
\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

В следующих представлениях будем использовать обозначения (5.1.12).

$$k(x,y,t,\tau) \approx k_{n,n+1}(x,y,t,\tau) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n+1} \alpha_{i,j,k,l} U_i(x)\, U_j(y) T_k(t)\, T_l(\tau), \tag{5.1.13}$$

где

$$\alpha_{i,j,k,l} = \frac{1}{(n+2)^2(n+1)^2} \sum_{p=1}^{n+1}\Big[T_i(x_p) - \sigma_i T_{i+2}(x_p)\Big] \sum_{r=1}^{n+1}\Big[T_j(y_r) - \sigma_j T_{j+2}(y_r)\Big] \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{n+2} \delta_k T_k(t_s) \sum_{q=1}^{n+2} \delta_l T_l(\tau_q) k(x_p, y_r, t_s, \tau_q),$$

$$f(x,y) \approx f_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \beta_{i,j} U_i(x)\, U_j(y), \tag{5.1.14}$$

где

$$\beta_{i,j,m_3} = \frac{1}{(n+1)^3} \sum_{p=1}^{n+1}\Big[T_i(x_p) - \sigma_i T_{i+2}(x_p)\Big] \sum_{r=1}^{n+1}\Big[T_j(y_r) - \sigma_j T_{j+2}(y_r)\Big] f(x_p, y_r),$$

$$h_1(y) \approx h_{1,n+1}(y) = \sum_{l=0}^{n+1} \gamma_l^1 T_l(y), \qquad \gamma_l^1 = \frac{1}{n+2} \sum_{q=1}^{n+2} \delta_l T_l(\tau_q) h_1(\tau_q), \tag{5.1.15}$$

$$h_2(x) \approx h_{2,n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k^2 T_k(x), \qquad \gamma_k^2 = \frac{1}{n+2} \sum_{s=1}^{n+2} \delta_k T_k(t_s) h_2(t_s) \tag{5.1.16}$$

и

$$G^*(x,y) \approx G^*_{n+1}(x,y) = h_{1,n+1}(y) + h_{2,n+1}(x) - A,$$

т. е.

$$G^*_{n+1}(x,y) = \sum_{l=0}^{n+1} \gamma_l^1 T_l(y) + \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k^2 T_k(x) - A. \tag{5.1.17}$$

В дальнейшем нам понадобится формула

$$I_k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} T_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \tag{5.1.18}$$

Приближенное решение задачи (5.1.9), (5.1.10) найдем как точное решение задачи

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} \, u_{n+1}(t,\tau) \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} k_{n,n+1}(x,y,t,\tau) \, u_{n+1}(t,\tau) dt d\tau = F_n(x,y), \tag{5.1.19}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} u_{n+1}(t,y) dt = 0, \ -1 < y < 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} u_{n+1}(x,\tau) d\tau = 0, \ -1 < x < 1, \end{gathered} \tag{5.1.20}$$

где

$$F_n(x,y) = f_n(x,y) - \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} k_{n,n+1}(x,y,t,\tau) G^*_{n+1}(t,\tau) dt d\tau,$$

$$u_{n+1}(x,y) = \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{r=0}^{n+1} c_{p,r} T_p(x) \, T_r(y),$$

$c_{p,r}$ $(p, \ r = 0, \ 1, \ \ldots \ , \ n+1)$ – числа, подлежащие нахождению.

Применим в (5.1.19) свойство линейности интеграла. Перейдем от кратных интегралов к повторным. Воспользуемся далее спектральным соотношением (1.1.1), формулами $2T_k(x)\,T_p(x) = T_{k-p}(x) + T_{k+p}(x)$ и (5.1.18), а также аппроксимациями (5.1.13) – (5.1.17). От (5.1.19) придем к равенствам

$$\sum_{p=1}^{n+1}\sum_{r=1}^{n+1} c_{p,r}U_{p-1}(x)\,U_{r-1}(y) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n+1}\alpha_{i,j,k,l}U_i(x)\,U_j(y)\times$$

$$\times\sum_{p=0}^{n+1}\sum_{r=0}^{n+1} c_{p,r}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_k(t)\,T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_l(\tau)\,T_r(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\beta^*_{i,j}U_i(x)\,U_j(y), \quad (5.1.21)$$

$$\beta^*_{i,j} = \beta_{i,j} - \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n+1}\alpha_{i,j,0,l}\sum_{q=0}^{n+1}\gamma^1_q\Big(I_{|l-q|} + I_{l+q}\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\alpha_{i,j,k,0}\sum_{s=0}^{n+1}\gamma^2_s\Big(I_{|k-s|} + I_{k+s}\Big) + \alpha_{i,j,0,0}A.$$

Приравнивая в (5.1.21) коэффициенты при одинаковых многочленах $U_i(x)$, $U_j(y)$, для нахождения $c_{p,r}$ ($p,\ r = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n+1$) получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$c_{i+1,j+1} + \sum_{p=0}^{n+1}\sum_{r=0}^{n+1} c_{p,r}\ \mu_{i,j,p,r} = \beta^*_{i,j},$$
$$i = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n, \quad (5.1.22)$$

где

$$\mu_{i,j,p,r} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n+1}\alpha_{i,j,k,l}\Big(I_{|k-p|} + I_{k+p}\Big)\Big(I_{|l-r|} + I_{l+r}\Big),$$
$$i = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n, \qquad j = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n,$$
$$p = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n+1, \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n+1.$$

Система (5.1.22) содержит $(N+2)^2$ неизвестных и $(N+1)^2$ уравнений, однако, учитывая в (5.1.20) тот факт, что многочлены Чебышева образуют на $[-1,\ 1]$ линейно независимую систему, из (5.1.20) приходим к выводу, что все числа $c_{p,r}$, имеющие хотя бы один нулевой индекс, равны нулю. Исключив соответствующие столбцы из (5.1.22), получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей:

$$c_{i+1,j+1} + \sum_{p=1}^{n+1}\sum_{r=1}^{n+1} c_{p,r}\ \mu_{i,j,p,r} = \beta^*_{i,j},$$
$$i = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n. \quad (5.1.23)$$

Приведем теорему, устанавливающую разрешимость системы (5.1.23).

Введем класс функций $W^r\,H^\mu$, $\quad r \geqslant 1, \quad 0 < \mu \leqslant 1.$

Мы говорим, что функция $f(x,y) \in W^r\ H^\mu$, $r \geqslant 1$, если она по каждой переменной имеет производные до порядка $r \geqslant 1$ и r-я производная из класса $H(\mu)$, $0 < \mu \leqslant 1$.

Теорема 5.1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1.1.

Если $k(x,y,t,\tau) \in W^r H^\mu$, $f(x,y) \in W^r\ H^\mu$, $h_1(y) \in W^r H^\mu$, $h_2(x) \in W^r H^\mu$, $r \geqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$, *то при достаточно больших* n *система* (5.1.23) *разрешима и*

$$\|u(x,y) - u_{n+1}(x,y)\|_C = O\left(\frac{\ln^4 n}{n^{r+\mu-2}}\right),\ r + \mu - 2 > 0.$$

Доказательство проводится по схеме работы [64].

5.1.2. Класс функций $h(-1,\ 1) \times h(-1,\ 1)$

Вначале рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)} = f(x,y), \quad (x,y) \in D^2. \tag{5.1.24}$$

Если решение $\varphi(x,y)$ уравнения (5.1.24) ищется в классе функций, ограниченных на всем замкнутом квадрате D^2, то при выполнении условий (необходимых и достаточных)

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dx = 0, \qquad \int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dy = 0, \qquad -1 < x,y < 1,$$

оно имеет вид

$$\varphi(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\ R(f;x,y),$$

где

$$R(f;x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}f(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}.$$

Уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)} + \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k(x,y,t,\tau)\varphi(t,\tau)dtd\tau = f(x,y), \quad (x,y) \in D^2, \tag{5.1.25}$$

эквивалентно (в смысле разрешимости) относительно

$$u(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

интегральному уравнению Фредгольма вида

$$u(x,y)+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}N(x,y,t,\tau)\,u(t,\tau)dtd\tau=R(f;x,y),\tag{5.1.26}$$

в котором

$$N(x,y,t,\tau)=\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\frac{1}{\pi^4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}k(\xi,\eta,t,\tau)\frac{d\xi d\eta}{(\xi-x)(\eta-y)},$$

с присоединенными к нему уравнениями

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}k(x,y,t,\tau)u(t,\tau)dtd\tau\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\\=\int_{-1}^{1}f(x,y)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad -1<x,y<1,\\\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k(x,y,t,\tau)\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}u(t,\tau)dtd\tau\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\\=\int_{-1}^{1}f(x,y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},\qquad -1<x,y<1.\end{gathered}\tag{5.1.27}$$

Пусть однородное уравнение (5.1.26) неразрешимо. Тогда решение неоднородного уравнения (5.1.26) определяется формулой

$$u(x,y)=R(f;x,y)-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Gamma(x,y,\xi,\eta)R(f;\xi,\eta)d\xi d\eta,\tag{5.1.28}$$

где $\Gamma(x,y,\xi,\eta)$ – резольвента ядра $N(x,y,\xi,\eta)$.

Подставляя в (5.1.27) вместо $u(x,y)$ правую часть (5.1.28), получим условия вида

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega_1(x,y)f(x,y)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\\\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega_2(x,y)f(x,y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,\quad -1<x,y<1,\end{gathered}\tag{5.1.29}$$

где $\omega_1,\ \omega_2$ – определенные функции. Эти соотношения выражают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (5.1.25).

Теорема 5.1.3. *Пусть функции* $k(x, y, t, \tau)$, $f(x, y)$, *входящие в уравнение* (5.1.25), *принадлежат классу Гельдера* (*по всем переменным*), *Пусть далее однородное уравнение Фредгольма* (5.1.26) *неразрешимо.*

Тогда при выполнении условий (*необходимых и достаточных*) (5.1.29) *решение уравнения* (5.1.25) *относительно функции*

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}}$$

определяется формулой (5.1.28).

Построим приближенное решение уравнения (5.1.25). С этой целью функции нескольких переменных $k(x, y, t, \tau)$, $f(x, y)$ аппроксимируем интерполяционными многочленами, построенными по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n+1,\\
&t_q = \cos\frac{2q-1}{2n}\pi,\ q = 1,\ 2,\ \dots,\ n,\\
&y_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n+1,\\
&\tau_q = \cos\frac{2q-1}{2n}\pi,\ q = 1,\ 2,\ \dots,\ n,\\
&\delta_p = \begin{cases} 1, & p = 0,\\ 2, & p \geqslant 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.1.30}$$

В следующих представлениях будем использовать обозначения (5.1.30).

Приближенное решение $u_{n-1}(x, y)$ найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\, u_{n-1}(t, \tau)\frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)} k_{n,n-1}(x, y, t, \tau) u_{n-1}(t, \tau) dt d\tau =$$

$$= f_n(x, y) + H(x) + Q(y), \quad -1 < x, y < 1, \tag{5.1.31}$$

где

$$k(x, y, t, \tau) \approx k_{n,n-1}(x, y, t, \tau) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{i,j,k,l}T_i(x)\, T_j(y) T_k(t)\, T_l(\tau) \tag{5.1.32}$$

и

$$\alpha_{i,j,k,l} = \frac{1}{(n^2+n)^2}\sum_{p=1}^{n+1}\delta_i T_i(x_p)\sum_{r=1}^{n+1}\delta_j T_j(y_r)\sum_{s=1}^{n}\delta_k T_k(t_s)\sum_{q=1}^{n}\delta_l T_l(\tau_q)k(x_p,y_r,t_s,\tau_q),$$

$$f(x,y)\approx f_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\beta_{i,j}T_i(x)\,T_j(y), \tag{5.1.33}$$

где

$$\beta_{i,j}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{p=1}^{n+1}\delta_i T_i(x_p)\sum_{r=1}^{n+1}\delta_j T_j(y_r)f(x_p,y_r),$$

$$u_{n-1}(x,y)=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}c_{p,r}U_p(x)\,U_r(y),$$

$c_{p,r}$ $(p,\ r=0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-1)$ – числа, подлежащие нахождению.

Вспомогательные многочлены $H(x)$, $Q(y)$ определим так, чтобы для уравнения (5.1.31) были выполнены условия разрешимости

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Big(G_n(x,y)+H(x)+Q(y)\Big)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\quad -1<y<1,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Big(G_n(x,y)+H(x)+Q(y)\Big)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,\quad -1<x<1,$$

где

$$G_n(x,y)=f_n(x,y)-\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\;k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)u_{n-1}(t,\tau)dtd\tau.$$

Нетрудно получить из предыдущего тождества

$$H(x)+Q(y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{G_n(x,y)dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{G_n(x,y)dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{G_n(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

В результате будем иметь следующее приближенное уравнение относительно неизвестной функции $u_{n-1}(x,y)$:

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\;u_{n-1}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\,k^*_{n,n-1}(x,y,t,\tau)u_{n-1}(t,\tau)dtd\tau = f^*_n(x,y), \qquad (5.1.34)$$

$$-1<x,y<1,$$

где

$$k^*_{n,n-1}(x,y,t,\tau)=k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)+W_n(x,y,t,\tau),$$

$$W_n(x,y,t,\tau)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}},$$

$$f^*_n(x,y)=f_n(x,y)+V_n(x,y),$$

$$V_n(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}f_n(x,y)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}f_n(x,y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}f_n(x,y)\frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

Пользуясь формулой

$$J_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_k(t)dt=\begin{cases}0,5\,, & k=0,\\ -0,5\,, & k=-2,\\ 0, & k\neq 0,\ k\neq -2,\end{cases} \qquad (5.1.35)$$

упростим интегралы, входящие в многочлены $W_n(x,y)$, $V_n(x,y)$, и этим получить их представление через многочлены $T_{m_j}(x_j)$, $m_j=0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n$. Имеем

$$k^*_{n,n-1}(x,y,t,\tau)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{i,j,k,l}T_i(x)\,T_j(y)T_k(t)\,T_l(\tau)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{0,0,k,l}T_k(t)\,T_l(\tau)-$$

$$-\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{0,j,k,l}T_j(y)\,T_k(t)\,T_l(\tau)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{i,0,k,l}T_i(x)\,T_k(t)\,T_l(\tau),$$

$$f^*_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\beta_{i,j}T_i(x)\,T_j(y)-\sum_{j=0}^{n}\beta_{0,j}T_j(y)-\sum_{i=0}^{n}\beta_{i,0}T_i(x)+\beta_{0,0,0}.$$

Применяя в (5.1.34) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, учтя аппроксимации (5.1.32), (5.1.33) и спектральные соотношения (1.1.1), из (5.1.34) получим

$$\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} c_{p,r} T_{p+1}(x)\, T_{r+1}(y) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \alpha^*_{i,j,k,l} T_i(x)\, T_j(y) \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} c_{p,r} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, T_k(t)\, U_p(t) dt \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-\tau^2} T_l(\tau)\, U_r(\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \beta^*_{i,j} T_i(x)\, T_j(y). \tag{5.1.36}$$

Используя формулы

$$2\, T_p(x)\, U_k(x) = U_{p-k}(x) + U_{p+k}(x)$$

и (5.1.35), упростим интегралы, входящие в (5.1.36).

Приравнивая в (5.1.36) коэффициенты при одинаковых многочленах $T_i(x)$, $T_j(y)$, $i, j > 0$, для нахождения $c_{p,r}$ $(p,\ r = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-1)$ получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{gathered} c_{i-1,j-1} + \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} c_{p,r}\ \mu_{i,j,p,r} = \beta_{i,j}, \\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n, \\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n, \end{gathered} \tag{5.1.37}$$

где

$$\begin{gathered} \mu_{i,j,p,r} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{i,j,k,l} \Big(J_{k-p} + J_{k+p} \Big) \Big(J_{l-r} + J_{l+r} \Big), \\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n, \\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n, \\ p = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-1, \\ r = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-1. \end{gathered}$$

Отметим, что те уравнения из (5.1.36), которые содержат строки, где $m_j = 0, j = 1,\ 2,$ не вошли в систему (5.1.37) (этим в системе (5.1.37) не участвуют функции $W_n,\ V_n$).

Приведем теорему, устанавливающую разрешимость системы (5.1.37).

Теорема 5.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1.3. *Если* $k \in W^r H^\mu$, $f \in W^r H^\mu, r \geqslant 1,\ 0 < \mu \leqslant 1,$ *то при достаточно больших* n *система* (5.1.37) *разрешима и*

$$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \Big\| u(x,y) - u_{n-1}(x,y) \Big\|_C = O\left(\frac{\ln^4 n}{n^{r+\mu-2}}\right),\ r+\mu-2 > 0.$$

Доказательство проводится по схеме работы [64].

5.2. Сингулярные интегральные уравнения с трехкратными ядрами Коши

5.2.1. Класс неограниченных функций

Вначале рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}=f(x_1,\,x_2,\,x_3), \qquad (5.2.1)$$

$$-1<x_1,\,x_2,\,x_3<1.$$

Будем искать решение $\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3)$ в классе $h(0)\times h(0)\times h(0)$. Это означает, что $\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3)$ в любой замкнутой области из D^3, не содержащей граничных точек, принадлежит классу H, а вблизи граничных точек представима в виде

$$\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3)=(x_1+1)^{\alpha_1}(x_1-1)^{\beta_1}(x_2+1)^{\alpha_2}(x_2-1)^{\beta_2}(x_3+1)^{\alpha_3}(x_3-1)^{\beta_3}\varphi_0(x_1,\,x_2,\,x_3),$$

где $\varphi_0(x_1,\,x_2,\,x_3)\in H,\ -1<\alpha_j,\ \beta_j<0,\quad j=1,\ 2,\ 3.$

Присоединим к (5.2.1) условия:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t_1,x_2,x_3)dt_1=g_1(x_2,x_3),\ -1<x_2,x_3<1,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(x_1,t_2,x_3)dt_2=g_2(x_1,x_2),\ -1<x_1,x_3<1,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3=g_3(x_1,x_2),\ -1<x_1,x_2<1,
\end{aligned} \qquad (5.2.2)$$

где $g_1(x_2,x_3),\ g_2(x_1,x_2),\ g_3(x_1,x_2)$ – заданные функции класса $h(0)\times h(0)$, удовлетворяющие условиям согласования

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_1(t_2,x_3)dt_2=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_2(t_1,x_3)dt_1,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_1(x_2,t_3)dt_3=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_3(t_1,x_2)dt_1,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_2(x_1,t_3)dt_3=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_3(x_1,t_2)dt_2,
\end{aligned} \qquad (5.2.3)$$

и

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} g_1(t_2,t_3)dt_2dt_3 = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} g_2(t_1,t_3)dt_1dt_3 = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} g_3(t_1,t_2)dt_1dt_2 = A.$$

Согласно [36] решение задачи (5.2.1) – (5.2.3) дается формулой

$$\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3) = \frac{R(f;x_1,\,x_2,\,x_3)}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}} + G(x_1,\,x_2,\,x_3), \tag{5.2.4}$$

где

$$R(f;x_1,\,x_2,\,x_3) =$$

$$= -\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)} f(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_1dt_2dt_3, \tag{5.2.5}$$

$$G(x_1,\,x_2,\,x_3) = \frac{g_1(x_2,x_3)}{\sqrt{1-x_1^2}} + \frac{g_2(x_1,x_3)}{\sqrt{1-x_2^2}} + \frac{g_3(x_1,x_2)}{\sqrt{1-x_3^2}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g_1(t_2,x_3)dt_2 - \frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g_3(t_1,x_2)dt_1 -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g_2(x_1,t_3)dt_3 + \frac{A}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}.$$

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \varphi(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)} +$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} k(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\varphi(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_1dt_2dt_3 = f(x_1,\,x_2,\,x_3), \tag{5.2.6}$$

$$-1 < x_1,\,x_2,\,x_3 < 1.$$

Присоединим к (5.2.6) условия (5.2.2). Полагая

$$\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3) = \varphi^*(x_1,\,x_2,\,x_3) + \psi(x_1,\,x_2,\,x_3),$$

от задачи (5.2.6), (5.2.2), (5.2.3) придем к двум задачам:

$$\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \varphi^*(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)} = 0, \quad -1 < x_1,\,x_2,\,x_3 < 1, \tag{5.2.7}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(t_1,x_2,x_3)dt_1 = g_1(x_2,x_3),\ -1<x_2,x_3<1,\\
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(x_1,t_2,x_3)dt_2 = g_2(x_1,x_2),\ -1<x_1,x_3<1,\\
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(x_1,x_2,t_3)dt_3 = g_3(x_1,x_2),\ -1<x_1,x_2<1,\\
&\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_3 = A,
\end{aligned}\tag{5.2.8}$$

и

$$\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\psi(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\psi(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_1dt_2dt_3 = f^*(x_1,\,x_2,\,x_3),\tag{5.2.9}$$

где

$$f^*(x_1,\,x_2,\,x_3) = f(x_1,\,x_2,\,x_3) -$$

$$-\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k(x_1,\,x_2,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\varphi^*(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_1dt_2dt_3,\qquad -1<x_1,\,x_2,\,x_3<1,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\psi(t_1,x_2,x_3)dt_1 = 0,\qquad -1<x_2,x_3<1,\\
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\psi(x_1,t_2,x_3)dt_2 = 0,\qquad -1<x_1,x_3<1,\\
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\psi(x_1,x_2,t_3)dt_3 = 0,\qquad -1<x_1,x_2<1.
\end{aligned}\tag{5.2.10}$$

Согласно (5.2.4), (5.2.5) решение задачи (5.2.7), (5.2.8) определяется формулой

$$\varphi^*(x_1,\,x_2,\,x_3) = G(x_1,\,x_2,\,x_3),$$

а задача (5.2.9), (5.2.10) эквивалентна в смысле разрешимости интегральному уравнению Фредгольма

$$u(x_1,x_2,x_3)+$$
$$+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} N(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\,u(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 = F(x_1,x_2,x_3), \tag{5.2.11}$$

где
$$N(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3) = -\frac{1}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}\times$$
$$\times\frac{1}{\pi^6}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}\;\frac{k(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t_1,\,t_2,\,t_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3}{(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)(\xi_3-x_3)},$$

$$F(x_1,\,x_2,\,x_3) = -\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}\;\frac{f^*(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3}{(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)(\xi_3-x_3)},$$

$$\psi(x_1,\,x_2,\,x_3) = \frac{u(x_1,\,x_2,\,x_3)}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}.$$

Замечание 5.2.1. *Можно проверить, что условия (5.2.10) для решения $u(x_1,\,x_2,\,x_3)$ уравнения (5.2.11) соблюдаются.*

Пусть однородное уравнение (5.2.11) неразрешимо (имеет только нулевое решение). Тогда решение неоднородного уравнения (5.2.11) дается формулой

$$u(x_1,\,x_2,\,x_3) = F(x_1,\,x_2,\,x_3) - \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\Gamma(x_1,\,x_2,\,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)F(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3,$$

где $\Gamma(x_1,\,x_2,\,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – резольвента ядра $N(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)$.

Теорема 5.2.1. *Пусть функции $k(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)$, $f(x_1,\,x_2,\,x_3)$, входящие в уравнение* (5.2.6), *принадлежат классу Гельдера* (*по всем переменным*), *функции $g_1(x_2,x_3)$, $g_2(x_1,x_3)$, $g_3(x_1,x_2)$, входящие в* (5.2.8), *принадлежат классу $h(0)\times h(0)$. Пусть далее однородное уравнение Фредгольма* (5.2.11) *неразрешимо. Тогда задача* (5.2.6), (5.2.2), (5.2.3) *имеет единственное решение, представимое в виде*

$$\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3) = \frac{u(x_1,\,x_2,\,x_3)}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}} + \frac{g_1(x_2,x_3)}{\sqrt{1-x_1^2}} + \frac{g_2(x_1,x_3)}{\sqrt{1-x_2^2}} + \frac{g_3(x_1,x_2)}{\sqrt{1-x_3^2}} -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g_1(t_2,x_3)dt_2 - \frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g_3(t_1,x_2)dt_1 -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g_2(x_1,t_3)dt_3 + \frac{A}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}},$$

где $u(x_1,\,x_2,\,x_3)$ – решение уравнения (5.2.11).

Введем обозначения:

$$h_1(x_2,x_3)=\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}\;g_1(x_2,x_3),$$
$$h_2(x_1,x_3)=\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}\;g_2(x_1,x_3),$$
$$h_3(x_1,x_2)=\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}\;g_3(x_1,x_2),$$
$$G^*(x_1,\,x_2,\,x_3)=\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}\;G(x_1,\,x_2,\,x_3),$$

т. е.

$$G^*(x_1,\,x_2,\,x_3)=h_1(x_2,x_3)+h_2(x_1,x_3)+h_3(x_1,x_2)-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h_1(t_2,x_3)}{\sqrt{1-t_2^2}}dt_2-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h_3(t_1,x_2)}{\sqrt{1-t_1^2}}dt_1-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h_2(x_1,t_3)}{\sqrt{1-t_3^2}}dt_3+A.$$

Построим приближенное решение задачи (5.2.9), (5.2.10). С этой целью функции нескольких переменных k,f,h_1,h_2,h_3 аппроксимируем интерполяционными многочленами, построенными по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Введем обозначения:

$$\sigma_{m_j}=\begin{cases}1, & m_j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2,\\ 0, & m_j=n-1,\ n,\end{cases}\qquad \delta_{p_j}=\begin{cases}1, & p_j=0,\\ 2, & p_j\geqslant 1,\end{cases}$$
$$x_j^{k_j}=\cos\frac{2k_j-1}{2n+2}\pi,\ k_j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,\tag{5.2.12}$$
$$t_j^{q_j}=\cos\frac{2q_j-1}{2n+4}\pi,\ q_j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2,\quad j=1,\ 2,\ 3.$$

В следующих представлениях будем использовать обозначения (5.2.12).

$$k(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\approx k_{n,n+1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)=$$
$$=\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}\times$$
$$\times U_{m_1}(x_1)\,U_{m_2}(x_2)\,U_{m_3}(x_3)T_{p_1}(t_1)\,T_{p_2}(t_2)\,T_{p_3}(t_3),\tag{5.2.13}$$

где

$$\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}=\frac{1}{(n+2)^3(n+1)^3}\sum_{k_1=1}^{n+1}\Big[T_{m_1}(x_1^{k_1})-\sigma_{m_1}T_{m_1+2}(x_1^{k_1})\Big]\times$$
$$\times\sum_{k_2=1}^{n+1}\Big[T_{m_2}(x_2^{k_2})-\sigma_{m_2}T_{m_2+2}(x_2^{k_2})\Big]\times\sum_{k_3=1}^{n+1}\Big[T_{m_3}(x_3^{k_3})-\sigma_{m_3}T_{m_3+2}(x_3^{k_3})\Big]\times$$

$$\times \sum_{q_1=1}^{n+2} \delta_{p_1} T_{p_1}(t_1^{q_1}) \sum_{q_2=1}^{n+2} \delta_{p_2} T_{p_2}(t_2^{q_2}) \sum_{q_3=1}^{n+2} \delta_{p_3} T_{p_3}(t_3^{q_3}) k(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, x_3^{k_3}, t_1^{q_1}, t_2^{q_2}, t_3^{q_3}),$$

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) \approx f_n(x_1,\, x_2,\, x_3) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} \beta_{m_1,m_2,m_3} U_{m_1}(x_1)\, U_{m_2}(x_2)\, U_{m_3}(x_3), \qquad (5.2.14)$$

где

$$\beta_{m_1,m_2,m_3} = \frac{1}{(n+1)^3} \sum_{k_1=1}^{n+1} \Big[T_{m_1}(x_1^{k_1}) - \sigma_{m_1} T_{m_1+2}(x_1^{k_1}) \Big] \times$$

$$\times \sum_{k_2=1}^{n+1} \Big[T_{m_2}(x_2^{k_2}) - \sigma_{m_2} T_{m_2+2}(x_2^{k_2}) \Big] \times \sum_{k_3=1}^{n+1} \Big[T_{m_3}(x_3^{k_3}) - \sigma_{m_3} T_{m_3+2}(x_3^{k_3}) \Big] f(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, x_3^{k_3}),$$

$$h_1(x_2, x_3) \approx h_{1,n+1}(x_2, x_3) = \sum_{p_2=0}^{n+1} \sum_{p_3=0}^{n+1} \gamma^1_{p_2,p_3} T_{p_2}(x_2)\, T_{p_3}(x_3), \qquad (5.2.15)$$

где

$$\gamma^1_{p_2,p_3} = \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{q_2=1}^{n+2} \delta_{p_2} T_{p_2}(x_2^{q_2}) \sum_{q_3=1}^{n+2} \delta_{p_3} T_{p_3}(x_3^{q_3})\; h_1(x_2^{q_2}, x_3^{q_3}),$$

$$h_2(x_1, x_3) \approx h_{2,n+1}(x_1, x_3) = \sum_{p_1=0}^{n+1} \sum_{p_3=0}^{n+1} \gamma^2_{p_1,p_3} T_{p_1}(x_1)\, T_{p_3}(x_3), \qquad (5.2.16)$$

где

$$\gamma^2_{p_1,p_3} = \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{q_1=1}^{n+2} \delta_{p_1} T_{p_1}(x_1^{q_1}) \sum_{q_3=1}^{n+2} \delta_{p_3} T_{p_3}(x_3^{q_3})\; h_2(x_1^{q_1}, x_3^{q_3}),$$

$$h_3(x_1, x_2) \approx h_{3,n+1}(x_1, x_2) = \sum_{p_1=0}^{n+1} \sum_{p_2=0}^{n+1} \gamma^3_{p_1,p_2} T_{p_1}(x_1)\, T_{p_2}(x_2), \qquad (5.2.17)$$

где

$$\gamma^3_{p_1,p_2} = \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{q_1=1}^{n+2} \delta_{p_1} T_{p_1}(x_1^{q_1}) \sum_{q_2=1}^{n+2} \delta_{p_2} T_{p_2}(x_2^{q_2})\; h_3(x_1^{q_1}, x_2^{q_2}),$$

$$x_j^{q_j} = \cos\frac{2q_j - 1}{2n+4}\,\pi, \quad q_j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n+2, \quad j = 1,\ 2,\ 3.$$

$$G^*(x_1,\, x_2,\, x_3) \approx G^*_{n+1}(x_1,\, x_2,\, x_3) =$$

$$= h_{1,n+1}(x_2, x_3) + h_{2,n+1}(x_1, x_3) + h_{3,n+1}(x_1, x_2) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{h_{1,n+1}(t_2, x_3)}{\sqrt{(1-t_2^2)}} dt_2 -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h_{3,n+1}(t_1,x_2)}{\sqrt{(1-t_1^2)}}dt_1-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h_{2,n+1}(x_1,t_3)}{\sqrt{(1-t_3^2)}}dt_3+A. \tag{5.2.18}$$

Учитывая, что

$$I_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}T_k(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0,\end{cases} \tag{5.2.19}$$

упростим интегралы, входящие в $G^*_{n+1}(x_1,\,x_2,\,x_3)$ и в следствие этого получим представление этой функции по многочленам Чебышева первого рода:

$$G^*_{n+1}(x_1,\,x_2,\,x_3)=\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\gamma^1_{p_2,p_3}T_{p_2}(x_2)\,T_{p_3}(x_3)+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\gamma^2_{p_1,p_3}T_{p_1}(x_1)\,T_{p_3}(x_3)+\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\gamma^3_{p_1,p_2}T_{p_1}(x_1)\,T_{p_2}(x_2)-$$

$$-\sum_{p_3=0}^{n+1}\gamma^1_{0,p_3}T_{p_3}(x_3)-\sum_{p_2=0}^{n+1}\gamma^3_{0,p_2}T_{p_2}(x_2)-\sum_{p_1=0}^{n+1}\gamma^2_{p_1,0}T_{p_1}(x_1)+A.$$

Приближенное решение задачи (5.2.9), (5.2.10) найдем как точное решение задачи

$$\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u_{n+1}(t_1,\,t_2,\,t_3)}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n+1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\frac{u_{n+1}(t_1,\,t_2,\,t_3)}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}dt_1dt_2dt_3=$$

$$=F_n(x_1,\,x_2,\,x_3),\qquad -1<x_1,\,x_2,\,x_3<1, \tag{5.2.20}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t_1^2}}\,u_{n+1}(t_1,x_2,x_3)dt_1=0,\quad -1<x_2,x_3<1,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t_2^2}}\,u_{n+1}(x_1,t_2,x_3)dt_2=0,\quad -1<x_1,x_3<1, \tag{5.2.21}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t_3^2}}\,u_{n+1}(x_1,x_2,t_3)dt_3=0,\quad -1<x_1,x_2<1,$$

где

$$F_n(x_1,\,x_2,\,x_3)=f_n(x_1,\,x_2,\,x_3)-$$

$$-\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n+1}(x_1,\,x_2,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)G^*_{n+1}(t_1,\,t_2,\,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}},$$

$$u_{n+1}(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sum_{k_1=0}^{n+1}\sum_{k_2=0}^{n+1}\sum_{k_3=0}^{n+1}c_{k_1,k_2,k_3}T_{k_1}(x_1)\,T_{k_2}(x_2)\,T_{k_3}(x_3),$$

c_{k_1,k_2,k_3} $(k_j=0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n+1,\quad j=1,\ 2,\ 3)$ – числа, подлежащие нахождению.

Применяя в (5.2.20) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, пользуясь спектральным соотношением (1.1.1), формулами $T_k(x)\,T_p(x)=\dfrac{1}{2}(T_{k-p}(x)+T_{k+p}(x))$ и (5.2.19), а также аппроксимациями (5.2.13) – (5.2.18), от (5.2.20) придем к равенствам

$$\sum_{k_1=1}^{n+1}\sum_{k_2=1}^{n+1}\sum_{k_3=1}^{n+1}c_{k_1,k_2,k_3}U_{k_1-1}(x_1)\,U_{k_2-1}(x_2)\,U_{k_3-1}(x_3)+$$

$$+\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}U_{m_1}(x_1)U_{m_2}(x_2)U_{m_3}(x_3)\times$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{n+1}\sum_{k_2=0}^{n+1}\sum_{k_3=0}^{n+1}c_{k_1,k_2,k_3}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{p_1}(t_1)\,T_{k_1}(t_1)}{\sqrt{1-t_1^2}}dt_1\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{p_2}(t_2)\,T_{k_2}(t_2)}{\sqrt{1-t_2^2}}dt_2\times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{p_3}(t_3)T_{k_3}(t_3)}{\sqrt{1-t_3^2}}dt_3=\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\beta^*_{m_1,m_2,m_3}U_{m_1}(x_1)U_{m_2}(x_2)U_{m_3}(x_3),\quad(5.2.22)$$

где

$$\beta^*_{m_1,m_2,m_3}=\beta_{m_1,m_2,m_3}-$$

$$-\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,0,p_2,p_3}}{4}\sum_{q_2=0}^{n+1}\sum_{q_3=0}^{n+1}\gamma^1_{q_2,q_3}\Big(I_{|p_2-q_2|}+I_{p_2+q_2}\Big)\Big(I_{|p_3-q_3|}+I_{p_3+q_3}\Big)-$$

$$-\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,0,p_3}}{4}\sum_{q_1=0}^{n+1}\sum_{q_3=0}^{n+1}\gamma^2_{q_1,q_3}\Big(I_{|p_1-q_1|}+I_{p_1+q_1}\Big)\Big(I_{|p_3-q_3|}+I_{p_3+q_3}\Big)-$$

$$-\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,0}}{4}\sum_{q_1=0}^{n+1}\sum_{q_2=0}^{n+1}\gamma^3_{q_1,q_2}\Big(I_{|p_1-q_1|}+I_{p_1+q_1}\Big)\Big(I_{|p_2-q_2|}+I_{p_2+q_2}\Big)+$$

$$+\sum_{p_3=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,0,0,p_3}}{2}\sum_{q_3=0}^{n+1}\gamma^1_{0,q_3}\Big(I_{|p_3-q_3|}+I_{p_3+q_3}\Big)+$$

$$+\sum_{p_2=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,0,p_2,0}}{2}\sum_{q_2=0}^{n+1}\gamma^3_{0,q_2}\Big(I_{|p_2-q_2|}+I_{p_2+q_2}\Big)+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,0,0}}{2}\sum_{q_1=0}^{n+1}\gamma^2_{q_1,0}\Big(I_{|p_1-q_1|}+I_{p_1+q_1}\Big)-\alpha_{m_1,m_2,m_3,0,0,0}A.$$

Приравнивая в (5.2.22) коэффициенты при одинаковых многочленах $U_{m_1}(x_1)$, $U_{m_2}(x_2)$, $U_{m_3}(x_3)$ для нахождения c_{k_1,k_2,k_3} $(k_j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n{+}1,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$c_{m_1+1,m_2+1,m_3+1} + \sum_{k_1=0}^{n+1}\sum_{k_2=0}^{n+1}\sum_{k_3=0}^{n+1} c_{k_1,k_2,k_3}\ \mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3} = \beta^*_{m_1,m_2,m_3}, \tag{5.2.23}$$

$$m_1 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \quad m_2 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \quad m_3 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$\mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3} = \frac{1}{8}\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1} \alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}\times$$

$$\times\Big(I_{|p_1-k_1|} + I_{p_1+k_1}\Big)\Big(I_{|p_2-k_2|} + I_{p_2+k_2}\Big)\Big(I_{|p_3-k_3|} + I_{p_3+k_3}\Big),$$

$$m_1 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \qquad m_2 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \qquad m_3 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

$$k_1 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1, \quad k_2 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1, \quad k_3 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1.$$

Система (5.2.23) содержит $(N+2)^3$ неизвестных и $(N+1)^3$ уравнений, однако, учитывая в (5.2.21) тот факт, что многочлены Чебышева образуют на $[-1,\ 1]$ линейно независимую систему, из (5.2.21) приходим к выводу, что все c_{k_1,k_2,k_3}, имеющие хотя бы один нулевой индекс, равны нулю. Исключив соответствующие столбцы из (5.2.23), получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей:

$$c_{m_1+1,m_2+1,m_3+1} + \sum_{k_1=1}^{n+1}\sum_{k_2=1}^{n+1}\sum_{k_3=1}^{n+1} c_{k_1,k_2,k_3}\ \mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3} = \beta^*_{m_1,m_2,m_3}, \tag{5.2.24}$$

$$m_1 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \quad m_2 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \quad m_3 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Приведем теорему, устанавливающую разрешимость системы (5.2.24).

Теорема 5.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.2.1.

Если $k(x_1,\ x_2,\ x_3, t_1,\ t_2,\ t_3) \in W^rH^\mu$, $f(x_1,\ x_2,\ x_3) \in W^rH^\mu$, $h_1(x_2, x_3) \in W^rH^\mu$, $h_2(x_1, x_3) \in W^rH^\mu$, $h_3(x_1, x_2) \in W^rH^\mu, r \geqslant 1,\ 0 < \mu \leqslant 1$, *то при достаточно больших* n *система* (5.2.24) *разрешима и*

$$\|u(x_1,\ x_2,\ x_3) - u_{n+1}(x_1,\ x_2,\ x_3)\|_C = O\left(\frac{\ln^6 n}{n^{r+\mu-3}}\right),\ r+\mu-3 > 0.$$

Доказательство проводится по схеме работы [64].

5.2.2. Класс ограниченных функций

Вначале рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}=f(x_1,\,x_2,\,x_3),\qquad (x_1,\,x_2,\,x_3)\in D^3. \tag{5.2.25}$$

Если решение $\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3)$ уравнения (5.2.25) ищется в классе функций, ограниченных на всем замкнутом кубе D^3, то при выполнении условий (необходимых и достаточных)

$$\int\limits_{-1}^{1}f(x_1,\,x_2,\,x_3)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}}=0,\qquad k=1,\,2,\,3,\quad -1<x_1,\,x_2,\,x_3<1,$$

оно имеет вид [36]

$$\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3)=\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}\;R(f;x_1,\,x_2,\,x_3),$$

где

$$R(f;x_1,\,x_2,\,x_3)=-\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t_1,\,t_2,\,t_3)}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}.$$

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$
$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\varphi(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_1dt_2dt_3=f(x_1,\,x_2,\,x_3),\qquad (x_1,\,x_2,\,x_3)\in D^3. \tag{5.2.26}$$

Уравнение (5.2.26) эквивалентно (в смысле разрешимости) относительно

$$u(x_1,\,x_2,\,x_3)=\frac{\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3)}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}$$

интегральному уравнению Фредгольма вида

$$u(x_1,\,x_2,\,x_3)+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}N(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\,u(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_1dt_2dt_3=$$

$$= R(f; x_1, x_2, x_3), \tag{5.2.27}$$

в котором

$$N(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = -\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\times$$

$$\times\frac{1}{\pi^6}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t_1, t_2, t_3)}{\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}}\frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{(\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2)(\xi_3 - x_3)}$$

с присоединенными к нему уравнениями

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} I(x_1, x_2, x_3)dt_1 dt_2 dt_3\right)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}} = \int_{-1}^{1} f(x_1, x_2, x_3)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}},$$
$$k = 1, 2, 3, \quad -1 < x_1, x_2, x_3 < 1, \tag{5.2.28}$$

где

$$I(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\, k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)\, u(t_1, t_2, t_3).$$

Пусть однородное уравнение (5.2.27) неразрешимо. Тогда решение неоднородного уравнения (5.2.27) определяется формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = R(f; x_1, x_2, x_3) -$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Gamma(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)R(f; \xi_1, \xi_2, \xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{5.2.29}$$

где $\Gamma(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ – резольвента ядра $N(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Подставляя в (5.2.28) вместо $u(x_1, x_2, x_3)$ правую часть (5.2.29), получим условия вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega_k(x_1, x_2, x_3)f(x_1, x_2, x_3)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}} = 0,$$
$$k = 1, 2, 3, \quad -1 < x_1, x_2, x_3 < 1, \tag{5.2.30}$$

где ω_k – определенные функции. Эти соотношения выражают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (5.2.26).

Теорема 5.2.3. *Пусть функции $k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$, $f(x_1, x_2, x_3)$, входящие в уравнение (5.2.26), принадлежат классу Гельдера (по всем переменным), Пусть далее однородное уравнение Фредгольма (5.2.27) неразрешимо.*

Тогда при выполнении условий (необходимых и достаточных) (5.2.30) решение уравнения (5.2.26) относительно функции

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}$$

определяется формулой (5.2.29).

Построим приближенное решение уравнения (5.2.26). С этой целью функции нескольких переменных $k(x_1,\, x_2,\, x_3, t_1,\, t_2,\, t_3)$, $f(x_1,\, x_2,\, x_3)$ аппроксимируем интерполяционными многочленами, построенными по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\delta_{p_j} = \begin{cases} 1, & p_j = 0, \\ 2, & p_j \geqslant 1, \end{cases} \\
&x_j^{k_j} = \cos\frac{2k_j - 1}{2n+2}\pi, \quad k_j = 1,\ 2,\ \dots,\ n+1, \\
&t_j^{q_j} = \cos\frac{2q_j - 1}{2n}\pi, \quad q_j = 1,\ 2,\ \dots,\ n, \quad j = 1,\ 2,\ 3.
\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

В следующих представлениях будем использовать обозначения (5.2.31).

Приближенное решение $u_{n-1}(x_1,\, x_2,\, x_3)$ найдем как точное решение уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\, u_{n-1}(t_1, t_2, t_3)\frac{dt_1 dt_2 dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)} + \\
+ \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)} k_{n,n-1}(x_1,\, x_2,\, x_3, t_1,\, t_2,\, t_3)\times \\
\times u_{n-1}(t_1,\, t_2,\, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = f_n(x_1,\, x_2,\, x_3) + Q_1(x_2, x_3) + Q_2(x_1, x_3) + \\
+ Q_3(x_1, x_2), \qquad -1 < x_1,\ x_2,\ x_3 < 1,
\end{gathered} \tag{5.2.32}$$

где

$$\begin{gathered}
k(x_1,\, x_2,\, x_3, t_1,\, t_2,\, t_3) \approx k_{n,n-1}(x_1,\, x_2,\, x_3, t_1,\, t_2,\, t_3) = \\
= \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_2}(x_2)\, T_{m_3}(x_3)\times \\
\times T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3),
\end{gathered} \tag{5.2.33}$$

где

$$\begin{gathered}
\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3} = \\
= \frac{1}{(n^2+n)^3}\sum_{k_1=1}^{n+1}\delta_{m_1}T_{m_1}(x_1^{k_1})\sum_{k_2=1}^{n+1}\delta_{m_2}T_{m_2}(x_2^{k_2})\sum_{k_3=1}^{n+1}\delta_{m_3}T_{m_3}(x_3^{k_3})\times \\
\times\sum_{q_1=1}^{n}\delta_{p_1}T_{p_1}(t_1^{q_1})\sum_{q_2=1}^{n}\delta_{p_2}T_{p_2}(t_2^{q_2})\sum_{q_3=1}^{n}\delta_{p_3}T_{p_3}(t_3^{q_3}) k(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, x_3^{k_3}, t_1^{q_1}, t_2^{q_2}, t_3^{q_3}),
\end{gathered}$$

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) \approx f_n(x_1,\, x_2,\, x_3) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} \beta_{m_1,m_2,m_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_2}(x_2)\, T_{m_3}(x_3), \tag{5.2.34}$$

где

$$\beta_{m_1,m_2,m_3} = \frac{1}{(n+1)^3} \sum_{k_1=1}^{n+1} \delta_{m_1} T_{m_1}(x_1^{k_1}) \sum_{k_2=1}^{n+1} \delta_{m_2} T_{m_2}(x_2^{k_2}) \sum_{k_3=1}^{n+1} \delta_{m_3} T_{m_3}(x_3^{k_3}) f(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, x_3^{k_3}),$$

$$u_{n-1}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{n-1} c_{k_1,k_2,k_3} U_{k_1}(x_1)\, U_{k_2}(x_2)\, U_{k_3}(x_3),$$

c_{k_1,k_2,k_3} $(k_j = 0,\ 1,\ \ldots\ , n-1, \quad j = 1,\ 2,\ 3)$ – числа, подлежащие нахождению.

Вспомогательные многочлены $Q_1(x_2, x_3),\ Q_2(x_1, x_3),\ Q_3(x_1, x_2)$ определим так, чтобы для уравнения (5.2.32) были выполнены условия разрешимости

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \Big(G_n(x_1,\, x_2,\, x_3) + Q_1(x_2, x_3) + Q_2(x_1, x_3) + Q_3(x_1, x_2) \Big) \frac{dx_k}{\sqrt{1 - x_k^2}} = 0,$$

$$-1 < x_1,\, x_2,\, x_3 < 1, \quad k = 1,\ 2,\ 3,$$

где

$$G_n(x_1,\, x_2,\, x_3) = f_n(x_1,\, x_2,\, x_3) -$$

$$-\frac{1}{\pi^3} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\; k_{n,n-1}(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)\; u_{n-1}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3.$$

Нетрудно получить из предыдущего тождества

$$Q_1(x_2, x_3) + Q_2(x_1, x_3) + Q_3(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} G_n(x_1,\, x_2,\, x_3) \frac{dx_1}{\sqrt{1 - x_1^2}} -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} G_n(x_1,\, x_2,\, x_3) \frac{dx_2}{\sqrt{1 - x_2^2}} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} G_n(x_1,\, x_2,\, x_3) \frac{dx_3}{\sqrt{1 - x_3^2}} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} G_n(x_1,\, x_2,\, x_3) \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} G_n(x_1,\, x_2,\, x_3) \frac{dx_1 dx_3}{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_3^2)}} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}G_n(x_1,\,x_2,\,x_3)\frac{dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}-$$

$$-\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}G_n(x_1,\,x_2,\,x_3)\frac{dx_1dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}.$$

В результате будем иметь следующее приближенное уравнение относительно неизвестной функции $u_{n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3)$:

$$\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\;\frac{u_{n-1}(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\;k^*_{n,n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\times$$

$$\times\,u_{n-1}(t_1,\,t_2,\,t_3)dt_1dt_2dt_3=f^*_n(x_1,\,x_2,\,x_3),\quad -1<x_1,\,x_2,\,x_3<1,\tag{5.2.35}$$

где

$$k^*_{n,n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)=$$
$$=k_{n,n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)+W_n(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3),$$

$$f^*_n(x_1,\,x_2,\,x_3)=f_n(x_1,\,x_2,\,x_3)+V_n(x_1,\,x_2,\,x_3)$$

и

$$W_n(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\frac{dx_3}{\sqrt{1-x_3^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\frac{dx_1dx_2}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3,t_1,\,t_2,\,t_3)\frac{dx_1dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} k_{n,n-1}(x_1,\, x_2,\, x_3, t_1,\, t_2,\, t_3)\frac{dx_2 dx_3}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}} -$$

$$-\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} k_{n,n-1}(x_1,\, x_2,\, x_3, t_1,\, t_2,\, t_3)\frac{dx_1 dx_2 dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}},$$

$$V_n(x_1,\, x_2,\, x_3) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} f_n(x_1,\, x_2,\, x_3)\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} f_n(x_1,\, x_2,\, x_3)\frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} f_n(x_1,\, x_2,\, x_3)\frac{dx_3}{\sqrt{1-x_3^2}} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f_n(x_1,\, x_2,\, x_3)\frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f_n(x_1,\, x_2,\, x_3)\frac{dx_1 dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f_n(x_1,\, x_2,\, x_3)\frac{dx_2 dx_3}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}} -$$

$$-\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f_n(x_1,\, x_2,\, x_3)\frac{dx_1 dx_2 dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}.$$

Упростим интегралы, входящие в многочлены $W_n(x_1,\, x_2,\, x_3)$, $V_n(x_1,\, x_2,\, x_3)$, пользуясь формулой

$$J_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, U_k(t)dt = \begin{cases} 0,5\,, & k=0, \\ -0,5\,, & k=-2, \\ 0, & k\neq 0,\ k\neq -2. \end{cases}$$

Этим получим их представление через многочлены $T_{m_j}(x_j)$, $m_j = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n$.

Имеем

$$k^*_{n,n-1}(x_1,\, x_2,\, x_3, t_1,\, t_2,\, t_3) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} \sum_{p_1=0}^{n-1} \sum_{p_2=0}^{n-1} \sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_2}(x_2)\, T_{m_3}(x_3) \times$$

$$\times\, T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3) -$$

$$- \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} \sum_{p_1=0}^{n-1} \sum_{p_2=0}^{n-1} \sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{0,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3} T_{m_2}(x_2)\, T_{m_3}(x_3)\, T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3) -$$

$$- \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} \sum_{p_1=0}^{n-1} \sum_{p_2=0}^{n-1} \sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{m_1,0,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_3}(x_3)\, T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3) -$$

$$- \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{p_1=0}^{n-1} \sum_{p_2=0}^{n-1} \sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{m_1,m_2,0,p_1,p_2,p_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_2}(x_2)\, T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3) +$$

$$+ \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{p_1=0}^{n-1} \sum_{p_2=0}^{n-1} \sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{m_1,0,0,p_1,p_2,p_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3) +$$

$$+ \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{p_1=0}^{n-1} \sum_{p_2=0}^{n-1} \sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{0,m_2,0,p_1,p_2,p_3} T_{m_2}(x_2)\, T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3) +$$

$$+ \sum_{m_3=0}^{n} \sum_{p_1=0}^{n-1} \sum_{p_2=0}^{n-1} \sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{0,0,m_3,p_1,p_2,p_3} T_{m_3}(x_3)\, T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3) -$$

$$- \sum_{p_1=0}^{n-1} \sum_{p_2=0}^{n-1} \sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{0,0,0,p_1,p_2,p_3} T_{p_1}(t_1)\, T_{p_2}(t_2)\, T_{p_3}(t_3),$$

$$\begin{aligned} f^*_n(x_1,\, x_2,\, x_3) = &\sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} \beta_{m_1,m_2,m_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_2}(x_2)\, T_{m_3}(x_3) - \\ &- \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} \beta_{0,m_2,m_3} T_{m_2}(x_2)\, T_{m_3}(x_3) - \\ &- \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} \beta_{m_1,0,m_2,m_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_3}(x_3) - \\ &- \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \beta_{m_1,m_2,0} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_2}(x_2) + \\ &+ \sum_{m_1=0}^{n} \beta_{m_1,0,0} T_{m_1}(x_1) + \sum_{m_2=0}^{n} \beta_{0,m_2,0} T_{m_2}(x_2) + \\ &+ \sum_{m_3=0}^{n} \beta_{0,0,m_3} T_{m_3}(x_3) - \beta_{0,0,0}. \end{aligned}$$

Применив в (5.2.35) свойство линейности интеграла и перейдя от кратных интегралов к повторным, учтя аппроксимации (5.2.33), (5.2.34) и спектральные соотношения (1.1.1), из (5.2.35) получим:

$$
\begin{gathered}
-\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{n-1} c_{k_1,k_2,k_3} T_{k_1+1}(x_1)\, T_{k_2+1}(x_2)\, T_{k_3+1}(x_3) + \\
+\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha^*_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_2}(x_2)\, T_{m_3}(x_3)\times \\
\times \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{n-1} c_{k_1,k_2,k_3} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t_1^2}\, T_{p_1}(t_1)\, U_{k_1}(t_1)dt_1\times \\
\times \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t_2^2}\, T_{p_2}(t_2)\, U_{k_2}(t_2)dt_2\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t_3^2}\, T_{p_3}(t_3)\, U_{k_3-1}(t_3)dt_3 = \\
= \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n} \beta^*_{m_1,m_2,m_3} T_{m_1}(x_1)\, T_{m_2}(x_2)\, T_{m_3}(x_3). \qquad (5.2.36)
\end{gathered}
$$

Используя формулу

$$2\, T_p(x)\, U_k(x) = U_{p-k}(x) + U_{p+k}(x),$$

упростим интегралы, входящие в (5.2.36).

Приравняем в (5.2.36) коэффициенты при одинаковых многочленах $T_{m_1}(x_1)$, $T_{m_2}(x_2)$, $T_{m_3}(x_3)$, $m_j > 0,\ j = 1,\ 2,\ 3$.

Для нахождения c_{k_1,k_2,k_3} $(k_j = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-1,\ \ j = 1,\ 2,\ 3)$ получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$
\begin{gathered}
-c_{m_1-1,m_2-1,m_3-1} + \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{n-1} c_{k_1,k_2,k_3}\ \mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3} = \beta_{m_1,m_2,m_3}, \\
m_1 = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n, \\
m_2 = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n, \qquad (5.2.37) \\
m_3 = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n,
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3} = \\
= \frac{1}{8}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}(J_{p_1-k_1} + J_{p_1+k_1})(J_{p_2-k_2} + J_{p_2+k_2})(J_{p_3-k_3} + J_{p_3+k_3}), \\
m_j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n, \\
k_j = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-1, \\
j = 1,\ 2,\ 3.
\end{gathered}
$$

Отметим, что те уравнения из (5.2.36), которые содержат строки, где $m_j = 0$, $j = 1,\ 2,\ 3$, не вошли в систему (5.2.37). Этим в системе (5.2.37) не участвуют функции W_n, V_n.

Приведем теорему, устанавливающую разрешимость системы (5.2.37).

Теорема 5.2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.2.3. *Если* $k \in W^r H^\mu$, $f \in W^r H^\mu$, $r \geqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$, *то при достаточно больших* n *система* (5.2.37) *разрешима и*

$$\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}\,\left\|u(x_1,\,x_2,\,x_3) - u_{n-1}(x_1,\,x_2,\,x_3)\right\|_C = O\left(\frac{\ln^6 n}{n^{r+\mu-3}}\right),$$

$$r + \mu - 3 > 0.$$

Доказательство проводится по схеме работы [64].

5.3. СИУ с двукратными ядрами Коши и специальной правой частью

Рассмотрим далее сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}=\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}f(x,y),\quad (x,y)\in D^2, \tag{5.3.1}$$

где $D^2=(-1,\ 1)\times(-1,\ 1)$, $f-$ заданная непрерывная по Гельдеру функции в $\overline{D}$, $\varphi(x,y)-$ искомая функция. Уравнение (5.3.1) применяется в аэроупругости [1].

5.3.1. Точное и приближенное решение в классе $h(0)\times h(0)$

Будем искать решение $\varphi(x,y)$ уравнения (5.3.1) в классе $h(0)\times h(0)$. Присоединим к (5.3.1) условия:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t,y)dt=g_1(y),\ -1<y<1,\\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(x,\tau)d\tau=g_2(x),\ -1<x<1,\end{gathered} \tag{5.3.2}$$

где $g_1(y),g_2(x)$ – заданные функции класса $h(0)$, удовлетворяющие условиям согласования

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_1(\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_2(t)dt=A. \tag{5.3.3}$$

Согласно [58] решение задачи (5.3.1) – (5.3.3) дается формулой

$$\varphi(x,y)=\psi(x,y)+G(x,y), \tag{5.3.4}$$

где

$$\psi(x,y)=\frac{R_1(f;x,y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}, \tag{5.3.5}$$

$$R_1(f;x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}f(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)},$$

$$G(x,y)=\frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}}-\frac{A}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

Для построения приближенного решения $\varphi_{n,m}(x,y)$ уравнения (5.3.1) представим ее в виде

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\varphi_0(x,y)+\psi_{n,m}(x,y),$$

где $\varphi_0(x, y)$ решение задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi_0(t, \tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)} = 0, \quad (x, y) \in D^2,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_0(t, y)dt = g_1(y),\ -1 < y < 1, \qquad (5.3.6)\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_0(x, \tau)d\tau = g_2(x),\ -1 < x < 1,
\end{aligned}$$

а $\psi_{n,m}(x, y)$ решение следующей задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_{n,m}(t, \tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau = \ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}f_{n,m}(x, y), \quad (x, y) \in D^2,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi_{n,m}(t, y)dt = 0,\ -1 < y < 1, \qquad (5.3.7)\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi_{n,m}(x, \tau)d\tau = 0,\ -1 < x < 1,
\end{aligned}$$

где $f_{n,m}(x, y)$ – интерполяционный многочлен (вид которого укажем позже), построенный по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

В соответствии с выше рассмотренным и учетом (5.3.5), решение задачи (5.3.6) задается формулой

$$\varphi_0(x, y) = G(x, y). \qquad (5.3.8)$$

Решением же задачи (5.3.7) является функция

$$\psi_{n,m}(x, y) = \frac{R_1(f_{n,m}; x, y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}. \qquad (5.3.9)$$

На основании (5.3.9) и предыдущих вычислений построим четыре вычислительные схемы численного решения задачи (5.3.1) – (5.3.3).

Укажем построение интерполяционного многочлена $f_{n,m}(x, y)$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
x_k &= \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,\\
y_k &= \cos\frac{2k-1}{2m+2}\pi, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m+1,
\end{aligned}$$

$$\zeta_p = \begin{cases} 1, & p = 0,\\ 2, & p \geqslant 1. \end{cases}$$

Пусть далее

$$f(x,y) \approx f_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_{i,j}^{*} T_i(x)\, T_j(y), \tag{5.3.10}$$

где

$$f_{i,j}^{*} = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{p=1}^{n+1} \zeta_i T_i(x_p) \sum_{r=1}^{m+1} \zeta_j T_j(y_r) f(x_p, y_r).$$

Применяя в (5.3.9) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, используя (4.2.5) и учитывая (5.3.10), получим **схему 5.3.1**:

$$\begin{gathered}
\varphi_{n,m}(x,y) = \frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}} - \\
- \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \times \\
\times \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left[-\pi\sqrt{1-x^2}T_i(x) + 2T_i(x) + {\sum_{p=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]}}{}^{0} \alpha_p T_{i-2p}(x) \right] \times \\
\times \left[-\pi\sqrt{1-y^2}T_j(y) + 2T_j(y) + {\sum_{q=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}}{}^{0} \alpha_q T_{q-2j}(y) \right] f_{i,j}^{*},
\end{gathered} \tag{5.3.11}$$

$$\alpha_k = \frac{-4}{4k^2-1}, \quad k \geqslant 0.$$

Используя (4.2.6) и учитывая (5.3.10), получим **схему 5.3.2**:

$$\begin{gathered}
\varphi_{n,m}(x,y) = \frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}} - \\
- \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \times \\
\times \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left[-\pi\sqrt{1-x^2}T_i(x) + \sum_{p=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \beta_p^{(i)} U_{i-2p}(x) \right] \times \\
\times \left[-\pi\sqrt{1-y^2}T_j(y) + \sum_{q=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \beta_q^{(j)} U_{j-2q}(y) \right] f_{i,j}^{*},
\end{gathered} \tag{5.3.12}$$

$$\beta_0^{(0)} = 2, \quad \beta_0^{(1)} = 1, \quad \beta_0^{(k)} = 1,$$

$$\beta_1^{(k)} = -\frac{5}{3}, \quad \beta_j^{(k)} = \frac{8}{(2j-3)(4j^2-1)}, \qquad j = \overline{2, \left[\frac{k}{2}\right]}, \quad k \geqslant 2.$$

Пусть теперь

$$f(x,y) \approx f_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f^*_{i,j} U_i(x)\, U_j(y), \tag{5.3.13}$$

где

$$f^*_{i,j} = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{p=1}^{n+1}\Big[T_i(x_p) - \sigma^1_i T_{i+2}(x_p)\Big] \sum_{r=1}^{m+1}\Big[T_j(y_r) - \sigma^2_j T_{j+2}(y_r)\Big] f(x_p, y_r),$$

$$\sigma^1_i = \begin{cases} 1, & i = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-2, \\ 0, & i = n-1,\ n, \end{cases} \qquad \sigma^2_j = \begin{cases} 1, & j = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ m-2, \\ 0, & j = m-1,\ m. \end{cases}$$

По аналогии с предыдущими вычислениями, используя (4.2.7) и учитывая (5.3.13), получим **схему 5.3.3**:

$$\begin{gathered} \varphi_{n,m}(x,y) = \frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}} - \\ - \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \times \\ \times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \left[-\pi\sqrt{1-x^2}U_i(x) + 2U_i(x) + \sum_{p=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \gamma_p U_{i-2p}(x) \right] \times \\ \times \left[-\pi\sqrt{1-y^2}U_j(y) + 2U_j(y) + \sum_{q=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \gamma_q U_{j-2q}(y) \right] f^*_{i,j}, \\ \gamma_j = \frac{-4}{4j^2-1}. \end{gathered} \tag{5.3.14}$$

Если использовать (4.2.8) и учесть (5.3.13), то получим **схему 5.3.4**:

$$\begin{gathered} \varphi_{n,m}(x,y) = \frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}} - \\ - \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \times \\ \times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \left[-\pi\sqrt{1-x^2}U_i(x) + {\sum_{p=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]}}{}^{0} \delta_p T_{i-2p}(x) \right] \times \\ \times \left[-\pi\sqrt{1-y^2}U_j(y) + {\sum_{q=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}}{}^{0} \delta_q T_{j-2q}(y) \right] f^*_{i,j}, \\ \delta_j = \frac{4}{2j+1}. \end{gathered} \tag{5.3.15}$$

Приведем оценки порядка погрешности приближенного решения (5.3.8), (5.3.9).

На основании (5.3.4) – решения задачи (5.3.1) – (5.3.3), и (5.3.8), (5.3.9) – решения задач (5.3.6), (5.3.7) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [56], получим следующую теорему.

Теорема 5.3.1. *Пусть функция* $f(x, y)$, *являющаяся правой частью уравнения* (5.3.1), *принадлежит классу* $W^r H^\mu$, $\quad r \geqslant 0, \quad 0 < \mu \leqslant 1$. *Пусть далее* $f(x, y)$ *аппроксимируется интерполяционными многочленами по узлам Чебышева первого рода* (5.3.10) *или* (5.3.13), $\varphi(x, y)$, $\ \varphi_{n,m}(x, y)$ *означают соответственно точное и приближенное решения задач* (5.3.1) – (5.3.3), (5.3.6), (5.3.7).

Тогда

$$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\,\Big\|\varphi(x,y)-\varphi_{n,m}(x,y)\Big\|_\infty \leqslant M_1 \frac{\ln^4 k}{k^{r+\mu}},$$
$$x \in [-\delta,\ \delta] \subset (-1,\ 1),\ y \in [-\gamma,\ \gamma] \subset (-1,\ 1).$$

Здесь $k = \min\{n,\ m\}$, константа M_1 не зависит от k.

Доказательство проводится по схеме работы [64].

5.3.2. Точное и приближенное решение в классе $h(-1,\ 1) \times h(-1,\ 1)$

Рассмотрим снова сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)} = \ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}f(x,y), \quad (x,y)\in D^2, \qquad (5.3.16)$$

где $D^2 = (-1,\ 1) \times (-1,\ 1)$, $f-$ заданная непрерывная по Гельдеру функции в $\overline{D^2}$, $\varphi(x, y)-$ искомая функция.

Если решение уравнения (5.3.16) ищется в классе функций, ограниченных на всем замкнутом квадрате D^2, т. е. $\varphi(x, y) \in h(-1,\ 1)\times h(-1,\ 1)$, то при выполнении условий (необходимых и достаточных)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\ln\frac{1-x}{1+x}f(x,y)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\ln\frac{1-y}{1+y}f(x,y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \qquad -1 < x, y < 1$$

оно имеет вид [58]

$$\varphi(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\times$$
$$\times\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\,f(t,\tau)\,\frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)}. \qquad (5.3.17)$$

Для построения приближенного решения уравнения (5.3.16) в заданном классе аппроксимируем функцию $f(x,y)$ интерполяционным многочленом $f_{n,m}(x,y)$, построенным по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Приближенное решение $\varphi_{n,m}(x,y)$ найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_{n,m}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}=$$

$$=\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}f_{n,m}(x,y)+H(x)+Q(y),\qquad -1<x,y<1, \tag{5.3.18}$$

где вспомогательные многочлены $H(x),\ Q(y)$ определим так, чтобы для уравнения (5.3.18) были выполнены условия разрешимости

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(G_{n,m}(x,y)+H(x)+Q(y))\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(G_{n,m}(x,y)+H(x)+Q(y))\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,\quad -1<x,y<1,$$

где $G_{n,m}(x,y)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}\ln\dfrac{1-y}{1+y}f_{n,m}(x,y)$.

Нетрудно получить из предыдущего тождества

$$H(x)+Q(y)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{G_{n,m}(x,y)dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{G_{n,m}(x,y)dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{G_{n,m}(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

В результате будем иметь следующее эквивалентное (5.3.18) приближенное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi_{n,m}(x,y)$:

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_{n,m}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}=F^*_{n,m}(x,y),\quad -1<x,y<1, \tag{5.3.19}$$

где

$$F^*_{n,m}(x,y)=\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}\,f_{n,m}(x,y)+V_{n,m}(x,y),$$

$$V_{n,m}(x,y)=-\ln\frac{1-y}{1+y}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\ln\frac{1-x}{1+x}\,f_{n,m}(x,y)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)-$$

$$-\ln\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\ln\frac{1-y}{1+y}\,f_{n,m}(x,y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}\,f_{n,m}(x,y)\frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

Выполним далее обращение уравнения (5.3.19) в заданном классе и получим

$$\varphi_{n,m}(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\times$$
$$\times\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left[\ln\dfrac{1-t}{1+t}\ln\dfrac{1-\tau}{1+\tau}f_{n,m}(t,\tau)+V_{n,m}(t,\tau)\right]}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}. \qquad (5.3.20)$$

На основании (5.3.20) и предыдущих вычислений, построим четыре вычислительные схемы численного решения уравнения (5.3.16).

Используя (5.3.10), упростим теперь функцию $V_{n,m}(x,y)$. Рассмотрим первую скобку

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}T_i(x)\,T_j(y)\ln\frac{1-x}{1+x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}T_j(y)\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(T_i(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\right) = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}d^1_iT_j(y).$$

Здесь и далее

$$d^1_k = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(T_k(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\right),\ k=0,\ 1,\ \ldots\ .$$

Упростим вторую скобку

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}T_i(x)\,T_j(y)\ln\frac{1-x}{1+x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}T_i(x)\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(T_j(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\right) = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}d^1_jT_i(x).$$

Рассмотрим третье слагаемое

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}T_i(x)\,T_j(y)\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}\frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} =$$
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(T_j(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(T_i(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}d^1_id^1_j.$$

Следовательно,

$$V_{n,m}(x,y) = \ln\frac{1-y}{1+y}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}d^1_iT_j(y) + \ln\frac{1-x}{1+x}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}d^1_jT_i(x) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}d^1_id^1_j.$$

Очевидно, что (5.3.20) теперь примет вид

$$\varphi_{n,m}(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\times$$

$$\times \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} \ln\frac{1-t}{1+t} \ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\, f_{n,m}(t,\tau)\, \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)}, \tag{5.3.21}$$

так как имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} = 0.$$

Применяя в (5.3.21) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, используя (4.2.1) и учитывая (5.3.10), из (5.3.21) получим **схему 5.3.5**:

$$\begin{gathered}
\varphi_{n,m}(x,y) = \\
= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi T_i(x) + \sqrt{1-x^2}\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_p T_{i-2-2p}(x)\right]\times \\
\times\left[-\pi T_j(y) + \sqrt{1-y^2}\sum_{q=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_q T_{j-2-2q}(y)\right] f^*_{i,j}, \\
\alpha_k = -8\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{2m+1}.
\end{gathered} \tag{5.3.22}$$

Используя же (4.2.2) и учитывая (5.3.10), из (5.3.21) получим **схему 5.3.6**:

$$\begin{gathered}
\varphi_{n,m}(x,y) = \\
= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi T_i(x) + \sqrt{1-x^2}\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}\beta_p U_{i-2-2p}(x)\right]\times \\
\times\left[-\pi T_j(y) + \sqrt{1-y^2}\sum_{q=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}\beta_q U_{j-2-2q}(y)\right] f^*_{i,j}, \\
\beta_k = -\frac{4}{2k+1}.
\end{gathered} \tag{5.3.23}$$

По аналогии с предыдущим, используя (4.2.3) и учитывая (5.3.13), из (5.3.21) получим для $\varphi_{n,m}(x,y)$ **схему 5.3.7**:

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi U_i(x)+\sqrt{1-x^2}\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}\gamma_p U_{i-2-2p}(x)\right]\times$$
$$\times\left[-\pi U_j(y)+\sqrt{1-y^2}\sum_{q=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}\gamma_q U_{j-2-2q}(y)\right]f^*_{i,j}, \tag{5.3.24}$$
$$\gamma_k=-8\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{2m+1}.$$

Если же использовать (4.2.4) и учесть (5.3.13), то из (5.3.21) получим **схему 5.3.8**:

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi U_i(x)+\sqrt{1-x^2}\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^0\delta_p T_{i-2-2p}(x)\right]\times$$
$$\times\left[-\pi U_j(y)+\sqrt{1-y^2}\sum_{q=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^0\delta_q T_{j-2-2q}(y)\right]f^*_{i,j}, \tag{5.3.25}$$
$$\delta_k=-16\sum_{m=0}^{k}\frac{k+1-m}{2m+1}.$$

Приведем оценки порядка погрешности приближенного решения (5.3.21) и эквивалентных ему вычислительных схем (5.3.22) – (5.3.25).

На основании (5.3.17), (5.3.21) и (5.3.10), (5.3.13) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [56], получим следующую теорему.

Теорема 5.3.2. *Пусть функция $f(x,y)$, являющаяся правой частью уравнения (5.3.16), принадлежит классу W^rH^μ, $r\geqslant 0$, $0<\mu\leqslant 1$. Пусть далее $f(x,y)$ аппроксимируется интерполяционными многочленами по узлам Чебышева первого рода (5.3.10) или (5.3.13), $\varphi(x,y)$, $\varphi_{n,m}(x,y)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (5.3.16), (5.3.18). Тогда*

$$\Big\|\varphi(x,y)-\varphi_{n,m}(x,y)\Big\|_\infty\leqslant M_2\frac{\ln^4 k}{k^{r+\mu}},$$
$$x\in[-\delta,\ \delta]\subset(-1,\ 1),\ y\in[-\gamma,\ \gamma]\subset(-1,\ 1).$$

Здесь $k=\min\{n,\ m\}$, константа M_2 не зависит от k. Доказательство проводится по схеме работы [64].

5.3.3. Точное и приближенное решение в классе $h(1)\times h(1)$

Рассмотрим снова сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}=\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}f(x,y), \qquad (x,y)\in D^2, \tag{5.3.26}$$

где $D^2=(-1,\ 1)\times(-1,\ 1)$, $f-$ заданная непрерывная по Гельдеру функции в $\overline{D^2}$, $\varphi(x,y)-$ искомая функция.

Если решение $\varphi(x,y)$ уравнения (5.3.26) ищется в классе функций $h(1)\times h(1)$, то оно имеет вид [58]

$$\varphi(x,y)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\times$$
$$\times\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}f(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}, \qquad (x,y)\in D^2. \tag{5.3.27}$$

Для построения приближенного решения уравнения (5.3.26) в заданном классе аппроксимируем функцию $f(x,y)$ интерполяционным многочленом $f_{n,m}(x,y)$, построенным по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Приближенное решение $\varphi_{n,m}(x,y)$ найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_{n,m}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}=\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}\ f_{n,m}(x,y), \qquad (x,y)\in D^2. \tag{5.3.28}$$

Выполним далее обращение уравнения (5.3.28) в заданном классе $h(1)\times h(1)$ и получим

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\times$$
$$\times\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\ f_{n,m}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}, \qquad (x,y)\in D^2. \tag{5.3.29}$$

Аналогично предыдущему построим вычислительные схемы численного решения уравнения (5.3.26).

Применяя в (5.3.29) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, используя (4.2.11) и учитывая (5.3.10), из (5.3.29) получим **схему 5.3.9**:

$$\varphi_{n,m}(x,y) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\pi T_i(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_p T_{i-2-2p}(x) + \sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_p T_{i-1-2p}(x)\right)\right] \times$$
$$\times \left[\pi T_j(y) - \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_p T_{j-2-2p}(y) + \sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_p T_{j-1-2p}(y)\right)\right] f^*_{i,j},$$

$$\alpha_p = \sum_{m=0}^{p}\frac{-8}{2m+1}, \quad p \geqslant 0, \qquad \beta_p = \alpha_p + \frac{4}{2p+1}, \quad p \geqslant 0. \qquad (5.3.30)$$

По аналогии с предыдущим, используя (4.2.10) и учитывая (5.3.10), из (5.3.29) получим **схему 5.3.10**:

$$\varphi_{n,m}(x,y) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\pi T_i(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\delta_p U_{i-1-2p}(x) + \sum_{p=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]}\gamma_p U_{i-2p}(x)\right)\right] \times$$
$$\times \left[\pi T_j(y) - \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\left(\sum_{q=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}\delta_p U_{j-1-2p}(y) + \sum_{p=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_p U_{j-2p}(y)\right)\right] f^*_{i,j},$$

$$\delta_p = \begin{cases} -2, & p = 0, \\ -\dfrac{8p}{4p^2-1}, & p > 0, \end{cases} \qquad \gamma_p = \frac{-4}{2p-1}, \quad p > 0. \qquad (5.3.31)$$

Используя (4.2.9) и учитывая (5.3.13), из (5.3.29) получим **схему 5.3.11**:

$$\varphi_{n,m}(x,y) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\pi U_i(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}\alpha_p U_{i-2-2p}(x) + \sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\beta_p U_{i-1-2p}(x)\right)\right] \times$$
$$\times \left[\pi U_j(y) - \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}\alpha_p U_{j-2-2p}(y) + \sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}\beta_p U_{j-1-2p}(y)\right)\right] f^*_{i,j},$$

$$\alpha_p = \sum_{m=0}^{p}\frac{-8}{2m+1}, \quad p \geqslant 0, \qquad \beta_p = \alpha_p + \frac{4}{2p+1}, \quad p \geqslant 0. \qquad (5.3.32)$$

Используя (4.2.12) и учитывая (5.3.13), из (5.3.29) получим **схему 5.3.12**:

$$\varphi_{n,m}(x,y)=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\pi U_i(x)-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_p T_{i-1-2p}(x)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_p T_{i-2-2p}(x)\right)\right]\times$$
$$\times\left[\pi U_j(y)-\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_p T_{j-1-2p}(y)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_p T_{j-2-2p}(y)\right)\right]f^*_{i,j},$$

$$\begin{aligned}&\delta_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{-16(p+1-m)}{2m+1},\ p\geqslant 0,\\&\gamma_0=-8,\ \ \gamma_p=\frac{\delta_{p-1}+\delta_p}{2},\ \ p>0.\end{aligned}\tag{5.3.33}$$

Приведем оценки порядка погрешности приближенного решения (5.3.29) и равносильных ему вычислительных схем (5.3.30) – (5.3.33).

На основании (5.3.27) и (5.3.29) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [56], получим следующую теорему.

Теорема 5.3.3. *Пусть функция $f(x,y)$, являющаяся правой частью уравнения (5.3.26), принадлежит классу W^rH^μ, $r\geqslant 0$, $0<\mu\leqslant 1$. Пусть далее $f(x,y)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (5.3.10) или (5.3.13) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x,y)$, $\varphi_{n,m}(x,y)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (5.3.26), (5.3.28) в классе функций $h(1)\times h(1)$. Тогда*

$$\sqrt{(1+x)(1+y)}\left\|\varphi(x,y)-\varphi_{n,m}(x,y)\right\|_\infty\leqslant M_3\frac{\ln^4 k}{k^{r+\mu}},$$
$$x\in[-\delta,\ \delta]\subset(-1,\ 1),\ y\in[-\gamma,\ \gamma]\subset(-1,\ 1).$$

Здесь $k=\min\{n,\ m\}$, константа M_3 не зависит от k. Доказательство проводится по схеме работы [64].

5.3.4. Точное и приближенное решение в классе $h(-1) \times h(-1)$

Рассмотрим снова сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)} = \ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}f(x,y), \quad (x,y)\in D^2, \tag{5.3.34}$$

где $D^2 = (-1,\ 1)\times(-1,\ 1)$, $f-$ заданная непрерывная по Гельдеру функции в $\overline{D^2}$, $\varphi(x,y)-$ искомая функция.

Если решение $\varphi(x,y)$ уравнения (5.3.34) ищется в классе функций $h(-1)\times h(-1)$, то оно имеет вид [58]

$$\begin{gathered}\varphi(x,y) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\times \\ \times\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\ f(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}, \\ (x,y)\in D^2.\end{gathered} \tag{5.3.35}$$

Для построения приближенного решения уравнения (5.3.34) в заданном классе аппроксимируем функцию $f(x,y)$ интерполяционным многочленом $f_{n,m}(x,y)$, построенным по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Приближенное решение $\varphi_{n,m}(x,y)$ найдем как точное решение уравнения

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi_{n,m}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)} = \ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}\ f_{n,m}(x,y), \\ (x,y)\in D^2.\end{gathered} \tag{5.3.36}$$

Выполним далее обращение уравнения (5.3.36) в заданном классе $h(1)\times h(1)$ и получим

$$\begin{gathered}\varphi_{n,m}(x,y) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\times \\ \times\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\ f_{n,m}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}, \\ (x,y)\in D^2.\end{gathered} \tag{5.3.37}$$

Применяя в (5.3.37) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, используя (4.2.15) и учитывая (5.3.10), из (5.3.37) получим **схему 5.3.13**:

$$
\begin{gathered}
\varphi_{n,m}(x,y) = \\
= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\pi T_i(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_p T_{i-2-2p}(x) - \sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_p T_{i-1-2p}(x)\right)\right]\times \\
\times\left[\pi T_j(y) - \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_p T_{j-2-2p}(y) - \sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_p T_{j-1-2p}(y)\right)\right] f^*_{i,j},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_p &= \sum_{m=0}^{p}\frac{-8}{2m+1},\ p \geqslant 0, \\
\beta_p &= \alpha_p + \frac{4}{2p+1},\ \ p \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{5.3.38}
$$

По аналогии с предыдущим, используя (4.2.13) и учитывая (5.3.10), из (5.3.37) получим **схему 5.3.14**:

$$
\begin{gathered}
\varphi_{n,m}(x,y) = \\
= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\pi T_i(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\delta_p U_{i-1-2p}(x) + \sum_{p=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]}\gamma_p U_{i-2p}(x)\right)\right]\times \\
\times\left[\pi T_j(y) - \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\left(\sum_{q=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}\delta_p U_{j-1-2p}(y) + \sum_{p=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_p U_{j-2p}(y)\right)\right] f^*_{i,j},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_p &= \begin{cases} 2, & p = 0, \\ \dfrac{8p}{4p^2-1}, & p > 0, \end{cases} \\
\gamma_p &= \frac{-4}{2p-1},\ \ p > 0.
\end{aligned} \tag{5.3.39}
$$

Используя (4.2.14) и учитывая (5.3.13), из (5.3.37) получим **схему 5.3.15**:

$$
\begin{gathered}
\varphi_{n,m}(x,y) = \\
= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\pi U_i(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}\alpha_p U_{i-2-2p}(x) - \sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\beta_p U_{i-1-2p}(x)\right)\right]\times \\
\times\left[\pi U_j(y) - \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}\alpha_p U_{j-2-2p}(y) - \sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}\beta_p U_{j-1-2p}(y)\right)\right] f^*_{i,j},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_p &= \sum_{m=0}^{p} \frac{-8}{2m+1}, \quad p \geqslant 0, \\
\beta_p &= \alpha_p + \frac{4}{2p+1}, \quad p \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{5.3.40}
$$

Используя (4.2.16) и учитывая (5.3.13), из (5.3.37) получим **схему 5.3.16**:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{n,m}(x,y) = \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\pi U_i(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_p T_{i-1-2p}(x) + \sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_p T_{i-2-2p}(x)\right)\right] \times \\
&\times \left[\pi U_j(y) - \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_p T_{j-1-2p}(y) + \sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_p T_{j-2-2p}(y)\right)\right] f^*_{i,j},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_p &= \sum_{m=0}^{p} \frac{-16(p+1-m)}{2m+1}, \ p \geqslant 0, \quad \gamma_0 = 8, \\
\gamma_p &= -\frac{\delta_{p-1}+\delta_p}{2}, \ \ p > 0.
\end{aligned} \tag{5.3.41}
$$

Приведем оценки порядка погрешности приближенного решения (5.3.37) и эквивалентных ему вычислительных схем (5.3.38) – (5.3.41).

На основании (5.3.35), (5.3.37) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [56], получим следующую теорему.

Теорема 5.3.4. *Пусть функция $f(x,y)$, являющаяся правой частью уравнения (5.3.34), принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. Пусть далее $f(x,y)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (5.3.10) или (5.3.13) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x,y)$, $\varphi_{n,m}(x,y)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (5.3.34),(5.3.36) в классе функций $h(-1)\times h(-1)$. Тогда*

$$
\sqrt{(1-x)(1-y)}\left\|\varphi(x,y) - \varphi_{n,m}(x,y)\right\|_\infty \leqslant M_4 \frac{\ln^4 k}{k^{r+\mu}},
$$

$$
x \in [-\delta,\ \delta] \subset (-1,\ 1),\ y \in [-\gamma,\ \gamma] \subset (-1,\ 1).
$$

Здесь $k = \min\{n,\ m\}$, константа M_4 не зависит от k.

Доказательство проводится по схеме работы [64].

Глава 6

Векторное сингулярное интегральное уравнение

6.1. Основные сведения из теории векторного СИУ. Единственность решения

Пусть две матрицы $A(x) = \Big(a_{k\,j}(x)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$ и $B(x) = \Big(b_{k\,j}(x)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$, элементы которых непрерывны по Гельдеру, заданы на $[-1,\ 1]$, при этом

$$\det\left(A(x) \pm B(x)\right) \neq 0 \quad \forall x \in [-1,\ 1].$$

Канонической матрицей $X(z) = \Big(\overset{k}{X}_j\ (z)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$ задачи линейного сопряжения

$$\begin{aligned} X^+(x) &= D(x)S^{-1}(x)X^-(x), \qquad -1 < x < 1, \\ D(x) &= A(x) - B(x), \\ S(x) &= A(x) + B(x), \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

называется матрица, обладающая свойствами [12]:

1) $\overset{k}{X}_j\ (z)$ аналитичны в плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}_z$ с разрезом вдоль $(-1,\ 1)$, кроме, быть может, точки $z = \infty$, при этом $\det(X(z))$ не имеет нулей в конечной части плоскости $\mathbb{C}_z$, за исключением, быть может, точек $z = \pm 1$;

2) $\overset{k}{X}_j\ (z)$, а также элементы обратной матрицы $X^{-1}(z) = \Big(\overset{k}{\chi}_j\ (z)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$ в окрестности точек $z = \pm 1$ допускают оценки

$$\left|\overset{k}{X}_j\ (z)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha < 1, \quad \left|\overset{k}{\chi}_j\ (z)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{|z-c|^{\beta}}, \quad \beta < 1, \quad c = \pm 1;$$

3) $\det\Big(p^{(k,j)}_{|\varkappa_k|}\Big)_{k,\,j=1}^{2} \neq 0$, где $p^{(k,j)}_{|\varkappa_k|}$ – коэффициенты, входящие в разложения функций $\overset{k}{X}_j\ (z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$\overset{k}{X}_j\ (z) = z^{-\varkappa_k}\left(p^{(k,j)}_{|\varkappa_k|} + p^{(k,j)}_{|\varkappa_k|+1} z^{-1} + \cdots\right), \quad k,\ j = 1,\ 2. \tag{6.1.2}$$

Числа $\varkappa_1,\ \varkappa_2$ называются частными индексами матрицы $X(z)$ или, что то же самое, задачи (6.1.1).

В дальнейшем нам понадобится разложения функций $\overset{k}{\chi}_j\ (z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$:

$$\overset{k}{\chi}_j\ (z) = z^{\varkappa_j}\left(\rho^{(k,j)}_{|\varkappa_j|} + \rho^{(k,j)}_{|\varkappa_j|+1} z^{-1} + \cdots\right), \quad k,\ j = 1,\ 2. \tag{6.1.3}$$

Из теории уравнения (1.1.13) известно, что в случае, если среди частных индексов канонической матрицы задачи линейного сопряжения (6.1.1) имеются положительные, то общее решение уравнения (1.1.13) содержит линейно произвольные постоянные. Представляет интерес найти дополнительные к (1.1.13) условия, из которых можно определить названные постоянные. Далее предлагаются такие условия как для характеристического ($K(x,\ t)\equiv 0$), так и для полного уравнения (1.1.13) .

Относительно новой неизвестной функции $u(x) = \Big(u_1(x),\ u_2(x)\Big)^T$, заданной по правилу

$$\varphi(x) = D^{-1}(x)\ X^{+}(x)\ u(x),$$

где $X^{+}(x)$ предельное значение канонической матрицы $X(z) = \Big(\overset{k}{X}_j\ (z)\Big)^2_{k,\,j=1}$ задачи линейного сопряжения (6.1.1), уравнение (1.1.13) запишем в форме вида (1.1.14):

$$\begin{gathered}
K^0(u(x);\,x) + K^{*}(u(x);\,x) = f(x), \quad -1<x<1,\\
K^0(u(x);\,x) = A(x)D^{-1}(x)\ X^{+}(x)\ u(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)D^{-1}(t)\ X^{+}(t)\ u(t)\frac{dt}{t-x},\\
K^{*}(u(x);\,x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} K^{*}(x,\,t)B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\,u(t)dt,\\
K^{*}(x,\,t) = K(x,\,t)B^{-1}(t),
\end{gathered} \tag{6.1.4}$$

предполагая, что $\det(B(x)) \neq 0\ \forall x\in[-1,\ 1]$.

6.1.1. Характеристическое уравнение

Рассмотрим характеристическое уравнение, полагая в (6.1.4) $K(x,\ t)\equiv 0$.

Согласно [12], при $\varkappa_1 \geqslant 0,\ \varkappa_2 < 0$ и выполнении необходимых и достаточных условий

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} h_2(t)\ t^{j-1}\ dt = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa_2|, \tag{6.1.5}$$

где $h_2(x)$ – вторая компонента вектора

$$h(x) = \big(X^{+}(x)\big)^{-1}\ B(x)\ S(x) = \Big(h_1(x), h_2(x)\Big)^T,$$

решение уравнения (6.1.4) определяется формулой

$$u(x) = R(f;x) + P(x), \tag{6.1.6}$$

$$\begin{gathered} R(f;x) = \left(X^{+}(x)\right)^{-1} A(x)S^{-1}(x)f(x) - \\ - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \left(X^{+}(t)\right)^{-1} B(t)S^{-1}(t)f(t)\frac{dt}{t-x}, \end{gathered} \tag{6.1.7}$$

$$\begin{gathered} P(x) = \left(p_{\varkappa_1-1}(x), 0\right)^{T}, \\ p_{\varkappa_1-1}(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_{\varkappa_1-1}x^{\varkappa_1-1}, \end{gathered} \tag{6.1.8}$$

$\gamma_k,\ k = 0,\ 1,\ \dots,\ \varkappa_1 - 1,$ – произвольные комплексные числа.

Для выделения единственного решения присоединим к уравнению (6.1.4) условия

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \Big[g_{11}(t)\,u_1(t) + g_{12}(t)\,u_2(t)\Big]t^{k-1}dt = \alpha_k, \quad k = 1,\ 2,\ \dots,\ \varkappa_1, \tag{6.1.9}$$

где $g_{11}(x), g_{12}(x)$ – элементы первой строки матрицы

$$G(x) = B(x)D^{-1}(x)X^{+}(x) = \Big(g_{kj}(x)\Big)_{k,j=1}^{2}, \tag{6.1.10}$$

α_k – заданные числа. Заметим, что левая часть равенства (6.1.9) есть первая компонента вектора

$$I_k = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G(t) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} dt, \quad k = 1,\ 2,\ \dots,\ \varkappa_1. \tag{6.1.11}$$

Преобразуем интеграл I_k. Подставляя вместо вектора $u(x) = \Big(u_1(x), u_2(x)\Big)^{T}$ его значение, определяемое (6.1.6), а затем принимая во внимание легко проверяемое тождество

$$A(x)D^{-1}(x)B(x) = B(x)D^{-1}(x)A(x),$$

ибо $AD^{-1}B = (D+B)D^{-1}B = (DD^{-1} + BD^{-1})B = (E + BD^{-1})B = BE + BD^{-1}B$ $= B(D^{-1}D + D^{-1}B) = BD^{-1}(D+B) = BD^{-1}A$, а также формулы [59]:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\frac{dt}{t-x} = \\ - \begin{pmatrix} x^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x) + \begin{pmatrix} 0 & \overset{k}{\psi}_1(x) \\ 0 & \overset{k}{\psi}_2(x) \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{6.1.12}$$

где $\overset{k}{\psi}_1(z), \overset{k}{\psi}_2(z)$ – главные части разложений в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$ соответственно функций $z^{k-1}\overset{2}{X}_1(z)$, $\overset{2}{X}_2(z)$ и

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G(t)\,P(t)dt = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1}g_{11}(t) & t^{k-1}g_{12}(t)\\ g_{21}(t) & g_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{\varkappa_1-1} \\ 0 \end{pmatrix}dt =$$

$$= -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\begin{pmatrix} z^{k-1}\overset{1}{X}_1(z)\,p_{\varkappa_1-1}(z)\\ \overset{1}{X}_2(z)\,p_{\varkappa_1-1}(z)\end{pmatrix},$$

получаем

$$I_k = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\begin{pmatrix} u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\times$$

$$\times\Big[\big(X^{+}(t)\big)^{-1}A(t)S^{-1}(t)f(t) - \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\big(X^{+}(\tau)\big)^{-1}B(\tau)S^{-1}(\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t} + P(t)\Big]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)A(t)S^{-1}(t)f(t)dt -$$

$$- \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\Big[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\big(X^{+}(\tau)\big)^{-1}B(\tau)S^{-1}(\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}\Big]dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)P(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)A(t)S^{-1}(t)f(t)dt -$$

$$- \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\Big[\begin{pmatrix} \tau^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} A(\tau)D^{-1}(\tau)\,X^{+}(\tau) -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & \overset{k}{\psi}_1(\tau)\\ 0 & \overset{k}{\psi}_2(\tau)\end{pmatrix}\Big]\big(X^{+}(\tau)\big)^{-1}B(\tau)S^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)\,X^{+}(t)\,P(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} 0 & \overset{k}{\psi}_1(\tau) \\ 0 & \overset{k}{\psi}_2(\tau)\end{pmatrix}\left(X^+(\tau)\right)^{-1}B(\tau)S^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}B(t)D^{-1}(t)\,X^+(t)\,P(t)dt.$$

Т. е.

$$I_k = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\begin{pmatrix} z^{k-1}\overset{1}{X}_1(z)\,p_{\varkappa_1-1}(z) \\ \overset{1}{X}_2(z)\,p_{\varkappa_1-1}(z)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\overset{k}{f_1^*} \\ \overset{k}{f_2^*}\end{pmatrix}, \tag{6.1.13}$$

где

$$\begin{pmatrix}\overset{k}{f_1^*} \\ \overset{k}{f_2^*}\end{pmatrix} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} 0 & \overset{k}{\psi}_1(\tau) \\ 0 & \overset{k}{\psi}_2(\tau)\end{pmatrix}\left(X^+(\tau)\right)^{-1}B(\tau)S^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Полагая в (6.1.9) $k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa_1$ на основании (6.1.13) последовательно найдем $\gamma_{\varkappa_1-1},\ \gamma_{\varkappa_1-2},\ \ldots\ ,\ \gamma_0:$

$$\begin{gathered} p^{(1,1)}_{\varkappa_1}\gamma_{\varkappa_1-1} = \alpha_1 - \overset{1}{f_1^*}, \quad p^{(1,1)}_{\varkappa_1}\neq 0, \\ \ldots \\ p^{(1,1)}_{\varkappa_1}\gamma_0 + p^{(1,1)}_{\varkappa_1+1}\gamma_1 + \cdots + p^{(1,1)}_{2\varkappa_1-1}\gamma_{\varkappa_1-1} = \alpha_{\varkappa_1} - \overset{\varkappa_1}{f_1^*}. \end{gathered} \tag{6.1.14}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 6.1.1. *Задача* (6.1.4), (6.1.5), (6.1.9) *имеет единственное решение.*

6.1.2. Полное уравнение

Обратимся теперь к полному уравнению (6.1.4). Пусть по-прежнему $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 < 0$. Тогда уравнение (6.1.4) эквивалентно в смысле разрешимости векторному уравнению Фредгольма вида

$$u(x) + \int\limits_{-1}^{1} N(x,\,t)\,u(t)dt = F(x), \quad -1 < x < 1, \tag{6.1.15}$$

$$N(x,t) = \frac{1}{\pi i}\left(X^+(x)\right)^{-1}A(x)S^{-1}(x)K^*(x,\,t)B(t)D^{-1}(t)X^+(t) -$$

$$-\frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_{-1}^{1}\left(X^+(t_1)\right)^{-1}B(t_1)S^{-1}(t_1)K^*(t_1,t)B(t)D^{-1}(t)X^+(t)\frac{dt_1}{t_1-x}, \tag{6.1.16}$$

$$F(x) = R(f;x) + P(x), \tag{6.1.17}$$

с присоединенными к этому уравнению $|\varkappa_2|$ дополнительными скалярными уравнениями (условиями разрешимости)

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} h_2^*(\tau)\tau^{j-1}d\tau = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ |\varkappa_2|,$$

$$h^*(\tau) = \Big(h_1^*(\tau), h_2^*(\tau)\Big)^T = \tag{6.1.18}$$

$$= \left(X^+(\tau)\right)^{-1} B(\tau)S^{-1}(\tau)\left[f(\tau) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} K^*(\tau,t)B(t)D^{-1}(t)X^+(t)\,u(t)dt\right],$$

$R(f;x)$, $P(x)$ в (6.1.17) определяются соответсвенно формулами (6.1.7), (6.1.8).

Если однородное уравнение (6.1.15) неразрешимо (не имеет ненулевых решений), то решение неоднородного уравнения (6.1.15) дается формулой

$$u(x) = F(x) - \int\limits_{-1}^{1} \Gamma(x,\ t)F(t)dt, \tag{6.1.19}$$

где $\Gamma(x,\ t)$ – резольвента ядра $N(x,\ t)$. Напомним, что $\Gamma(x,\ t)$ удовлетворяет интегральному уравнению [26]

$$-\Gamma(x,\ t) + N(x,\ t) = \int\limits_{-1}^{1} N(x,\tau)\Gamma(\tau,t)d\tau. \tag{6.1.20}$$

Снова, предполагая $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 < 0$, для выделения единственного решения к уравнению (6.1.4) присоединим условия (6.1.9). Интеграл I_k, определяемый (6.1.11), с учетом (6.1.19) принимает вид

$$I_k = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G(t)\left[F(t) - \int\limits_{-1}^{1}\Gamma(t,\tau)F(\tau)d\tau\right]dt. \tag{6.1.21}$$

Преобразуем (6.1.21), учитывая (6.1.20):

$$I_k = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G(t)F(t)dt - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G(t)\int\limits_{-1}^{1}\Gamma(t,\tau)F(\tau)d\tau dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G(t)F(t)dt -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G(t)\left[N(t,\tau) - \int\limits_{-1}^{1} N(t,\eta)\Gamma(\eta,\tau)d\eta\right]F(\tau)d\tau dt =$$

$$
= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G(t)F(t)dt - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\Big[\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G(t)N(t,\tau)dt\Big]F(\tau)d\tau +
$$

$$
+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\Big[\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G(t)N(t,\eta)dt\Big]\Gamma(\eta,\tau)d\eta F(\tau)d\tau.
$$

Упростим внутренний интеграл

$$
J_k(\tau) = \int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G(t)N(t,\tau)dt,
$$

используя (6.1.10), (6.1.16), (6.1.12), а также тождество $BD^{-1}A = AD^{-1}B$:

$$
\begin{aligned}
&J_k(\tau) = \\
&= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)(X^{+}(t))^{-1}A(t)S^{-1}(t)\times \\
&\qquad \times K^{*}(t,\tau)B(\tau)D^{-1}(\tau)X^{+}(\tau)dt - \\
&- \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\Big[\frac{-1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\frac{dt}{t-t_1}\Big]\times \\
&\qquad \times (X^{+}(t_1))^{-1}B(t_1)S^{-1}(t_1)K^{*}(t_1,\tau)B(\tau)D^{-1}(\tau)X^{+}(\tau)dt_1 = \\
&= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)A(t)S^{-1}(t)\times \\
&\qquad \times K^{*}(t,\tau)B(\tau)D^{-1}(\tau)X^{+}(\tau)dt - \\
&- \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} t_1^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A(t_1)D^{-1}(t_1)X^{+}(t_1)(X^{+}(t_1))^{-1}B(t_1)S^{-1}(t_1)\times \\
&\qquad \times K^{*}(t_1,\tau)B(\tau)D^{-1}(\tau)X^{+}(\tau)dt_1 + \\
&+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} 0 & \overset{k}{\psi}_1(t_1) \\ 0 & \overset{k}{\psi}_2(t_1) \end{pmatrix} (X^{+}(t_1))^{-1}B(t_1)S^{-1}(t_1)\times \\
&\qquad \times K^{*}(t_1,\tau)B(\tau)D^{-1}(\tau)X^{+}(\tau)dt_1 = \\
&= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} 0 & \overset{k}{\psi}_1(t) \\ 0 & \overset{k}{\psi}_2(t) \end{pmatrix} (X^{+}(t))^{-1}B(t)S^{-1}(t)\times \\
&\qquad \times K^{*}(t,\tau)B(\tau)D^{-1}(\tau)X^{+}(\tau)dt.
\end{aligned}
$$

Теперь (6.1.21) преобразуется к форме

$$I_k = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(t) D^{-1}(t) X^{+}(t) \Big[R(f;t) + P(t) \Big] dt -$$

$$- \left(\frac{1}{\pi i} \right)^2 \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \Big(0 \quad \overset{k}{\psi}_1 (t) 0 \quad \overset{k}{\psi}_2 (t) \Big) \left(X^{+}(t) \right)^{-1} B(t) S^{-1}(t) \times$$

$$\times K^{*}(t, \tau) B(\tau) D^{-1}(\tau) X^{+}(\tau) \Big[R(f;\tau) + P(\tau) \Big] dt d\tau +$$

$$+ \left(\frac{1}{\pi i} \right)^2 \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 & \overset{k}{\psi}_1 (t) \\ 0 & \overset{k}{\psi}_2 (t) \end{pmatrix} \left(X^{+}(t) \right)^{-1} B(t) S^{-1}(t) \times$$

$$\times K^{*}(t, \eta) B(\eta) D^{-1}(\eta) X^{+}(\eta) \Gamma(\eta, \tau) \Big[R(f;\tau) + P(\tau) \Big] dt d\eta d\tau. \qquad (6.1.22)$$

С учетом (6.1.22) условия (6.1.9) запишем в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\gamma_0, \ \ldots \ , \ \gamma_{\varkappa_1 - 1}$

$$H\gamma = \alpha, \qquad (6.1.23)$$

где $H = \Big(h_{k\,j} \Big)_{k,\, j=0}^{\varkappa_1 - 1}$ – известная матрица, $\alpha = \Big(\alpha_1, \ \ldots \ , \ \alpha_{\varkappa_1} \Big)^T$ – известный вектор, $\gamma = \Big(\gamma_0, \ \ldots \ , \ \gamma_{\varkappa_1 - 1} \Big)^T$.

Подведем итог.

Теорема 6.1.2. *Пусть однородное уравнение* (6.1.15) *неразрешимо,* $\det H \neq 0$, *где* $H = \Big(h_{k\,j} \Big)_{k,\, j=0}^{\varkappa_1 - 1}$ *– матрица линейной системы* (6.1.23), *тогда задача* (6.1.4), (6.1.9), (6.1.18) *имеет единственное решение.*

Замечание 6.1.1. *Все предыдущие рассуждения справедливы и в том случае, когда элементы матрицы* $A(x)$ *и* $B(x)$, *а также вектора* $f(x)$, *непрерывны по Гельдеру на* $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ *и достаточно мало, а в окрестности точек* $x = \pm 1$ *могут допускать интегрируемые особенности. Необходимо только требовать, чтобы особенности плотностей интегралов, входящих в равенства (6.1.4), (6.1.7), (6.1.15), в названных точках были порядка ниже единицы.*

6.2. Разложение векторного СИУ по многочленам Чебышева

6.2.1. О разложении характеристического оператора по многочленам Чебышева

Найдем разложение характеристического оператора по системе многочленов Чебышева. Получим формулы вида

$$
\begin{gathered}
A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x)\Big(T_j(x),\ T_{k-|\varkappa_2|}(x)\Big)^T + \\
+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)D^{-1}(t)\,X^{+}(t)\Big(T_j(t),\ T_{k-|\varkappa_2|}(t)\Big)^T\frac{dt}{t-x} = \\
= \begin{pmatrix} \mu_0^{(k,j)}U_0(x)+\dots+\mu_k^{(k,j)}U_k(x) \\ \nu_0^{(k,j)}U_0(x)+\dots+\nu_k^{(k,j)}U_k(x) \end{pmatrix}, \\
-1<x<1, \quad k\geqslant|\varkappa_2|, \qquad 0\leqslant j\leqslant k+\varkappa_1,
\end{gathered} \tag{6.2.1}
$$

$$
\begin{gathered}
A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x)\Big(U_j(x),\ U_{k-|\varkappa_2|}(x)\Big)^T + \\
+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\Big(U_j(t),\ U_{k-|\varkappa_2|}(t)\Big)^T\frac{dt}{t-x} = \\
= \begin{pmatrix} \lambda_0^{(k,j)}U_0(x)+\dots+\lambda_k^{(k,j)}U_k(x) \\ \sigma_0^{(k,j)}U_0(x)+\dots+\sigma_k^{(k,j)}U_k(x) \end{pmatrix}, \\
-1<x<1, \quad k\geqslant|\varkappa_2|, \qquad 0\leqslant j\leqslant k+\varkappa_1.
\end{gathered} \tag{6.2.2}
$$

Здесь $A(x)=\Big(a_{l\,m}(x)\Big)_{l,\,m=1}^2$, $B(x)=\Big(b_{l\,m}(x)\Big)_{l,\,m=1}^2$ – заданные на $[-1,\ 1]$ комплекснозначные матрицы, элементы которых непрерывны по Гельдеру, причем $\det(A(x)\pm B(x))\neq 0\ \forall x\in[-1,\ 1]$, $D(x)=A(x)-B(x)$, $X(z)=\Big(\overset{l}{X}_m\ (z)\Big)_{l,\,m=1}^2$ – каноническая матрица задачи линейного сопряжения

$$
X^{+}(x)=(A(x)-B(x))\Big(A(x)+B(x)\Big)^{-1}X^{-}(x), \quad -1<x<1, \tag{6.2.3}
$$

$\varkappa_1\geqslant 0$, $\varkappa_2<0$ – частные индексы матрицы $X(z)$.

Укажем правило нахождения коэффициентов $\mu_p^{(k,j)}$, $\nu_p^{(k,j)}$, $\lambda_p^{(k,j)}$, $\sigma_p^{(k,j)}$, входящих в правые части формул (6.2.1), (6.2.2).

Теорема 6.2.1. *Пусть на* $[-1,\ 1]$ *заданы матрицы* $A(x) = \Big(a_{l\,m}(x)\Big)_{l,\,m=1}^{2}$ *и* $B(x) = \Big(b_{l\,m}(x)\Big)_{l,\,m=1}^{2}$, *элементы которых принадлежат классу Гельдера, при этом* $\det(A(x) \pm B(x)) \neq\ 0\ \forall x \in [-1,\ 1]$. *Пусть далее* $X(z) = \Big(\overset{l}{X}_m\ (z)\Big)_{l,\,m=1}^{2}$ *– каноническая матрица задачи линейного сопряжения* (6.2.3), *частные индексы которой* $\varkappa_1 \geqslant 0,\ \varkappa_2 < 0$.

Тогда имеют место представления (6.2.1), (6.2.2), *коэффициенты* $\mu_p^{(k,j)}$, $\nu_p^{(k,j)}$, $\lambda_p^{(k,j)}$, $\sigma_p^{(k,j)}$ *правых частей которых вычисляются по формулам*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mu_p^{(k,j)}\\ \nu_p^{(k,j)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left[\overset{1}{X}_1\ (z)\,T_j(z)R_\infty^{(p+1)}\left(\frac{1}{z}\right) + \overset{2}{X}_1\ (z)\,T_{k-|\varkappa_2|}(z)R_\infty^{(p+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left[\overset{1}{X}_2\ (z)\,T_j(z)R_\infty^{(p+1)}\left(\frac{1}{z}\right) + \overset{2}{X}_2\ (z)\,T_{k-|\varkappa_2|}(z)R_\infty^{(p+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\end{pmatrix}, \tag{6.2.4}$$

$$k \geqslant |\varkappa_2|, \qquad 0 \leqslant j \leqslant k + \varkappa_1,$$
$$p = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ k,$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda_p^{(k,j)}\\ \sigma_p^{(k,j)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left[\overset{1}{X}_1\ (z)U_j(z)R_\infty^{(p+1)}\left(\frac{1}{z}\right) + \overset{2}{X}_1\ (z)U_{k-|\varkappa_2|}(z)R_\infty^{(p+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left[\overset{1}{X}_2\ (z)U_j(z)R_\infty^{(p+1)}\left(\frac{1}{z}\right) + \overset{2}{X}_2\ (z)U_{k-|\varkappa_2|}(z)R_\infty^{(p+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\end{pmatrix}, \tag{6.2.5}$$

$$k \geqslant |\varkappa_2|, \qquad 0 \leqslant j \leqslant k + \varkappa_1,$$
$$p = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ k,$$

где величина $R_\infty^{(p+1)}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ *определяется из нижеприведенного представления* (6.2.9), *которое есть ни что иное как* (2.1.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лишь формулу (6.2.4), поскольку доказательство формулы (6.2.5) проводится аналогично.

Принимая во внимания равенства (1.1.1) и

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_p(t)\,U_r(t)dt = \begin{cases}0, & p \neq r,\\ 0,5\,, & p = r,\end{cases}$$

из (6.2.1) находим

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mu_p^{(k,j)}\\ \nu_p^{(k,j)}\end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\Big(T_j(t)\,U_p(t), T_{k-|\varkappa_2|}(t)U_p(t)\Big)^T dt +$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\Big(T_j(t)\,T_{p+1}(t), T_{k-|\varkappa_2|}(t)\,T_{p+1}(t)\Big)^T dt, \tag{6.2.6}$$
$$p = 0,\ 1,\ \ldots, k.$$

Нетрудно получить

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}A(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\Big(T_j(t)\,U_p(t),\;T_{k-|\varkappa_2|}(t)\,U_p(t)\Big)^T dt=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\Big[\sqrt{z^2-1}\,\overset{1}{X}_1(z)\,T_j(z)U_p(z)+\sqrt{z^2-1}\,\overset{2}{X}_1(z)\,T_{k-|\varkappa_2|}(z)\,U_p(z)\Big]\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\Big[\sqrt{z^2-1}\,\overset{1}{X}_2(z)\,T_j(z)U_p(z)+\sqrt{z^2-1}\,\overset{2}{X}_2(z)\,T_{k-|\varkappa_2|}(z)\,U_p(z)\Big]\end{pmatrix}, \tag{6.2.7}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\Big(T_j(t)\,T_{p+1}(t),\;T_{k-|\varkappa_2|}(t)\,T_{p+1}(t)\Big)^T dt=$$

$$=\begin{pmatrix}-\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\Big[\overset{1}{X}_1(z)\,T_j(z)\,T_{p+1}(z)+\overset{2}{X}_1(z)\,T_{k-|\varkappa_2|}(z)\,T_{p+1}(z)\Big]\\ -\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\Big[\overset{1}{X}_2(z)\,T_j(z)\,T_{p+1}(z)+\overset{2}{X}_2(z)\,T_{k-|\varkappa_2|}(z)\,T_{p+1}(z)\Big]\end{pmatrix}. \tag{6.2.8}$$

Действительно, введя интегралы ($m=1,2$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\sqrt{\zeta^2-1}\,\Big(\overset{1}{X}_m(\zeta),\overset{2}{X}_m(\zeta)\Big)\Big(T_j(\zeta),T_{k-|\varkappa_2|}(\zeta)\Big)^T d\zeta=$$

$$=\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\Big(\overset{1}{X}_m(z),\overset{2}{X}_m(z)\Big)\Big(T_j(z),T_{k-|\varkappa_2|}(z)\Big)^T\right),$$

где Λ – замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\;1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки, деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,\;1]$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\Big(\overset{1}{X}_m{}^{+}(t)+\overset{1}{X}_m{}^{-}(t),\;\overset{2}{X}_m{}^{+}(t)+\overset{2}{X}_m{}^{-}(t)\Big)\Big(T_j(t),\;T_{k-|\varkappa_2|}(t)\Big)^T dt=$$

$$=\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\Big(\overset{1}{X}_m(z),\;\overset{2}{X}_m(z)\Big)\Big(T_j(z),\;T_{k-|\varkappa_2|}(z)\Big)^T\right).$$

Если теперь это же написать в матричном виде и учесть легко проверяемое (на основании (6.2.3)) соотношение

$$X^{+}(x)+X^{-}(x)=2\,A(x)\,D^{-1}(x)\,X^{+}(x),\qquad -1<x<1,$$

то получим (6.2.7). Аналогично доказывается и (6.2.8), если использовать вспомогательные интегралы ($m=1,2$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\Big(\overset{1}{X}_m(\zeta),\ \overset{2}{X}_m(\zeta)\Big)\Big(T_j(\zeta),\ T_{k-|\varkappa_2|}(\zeta)\Big)^T d\zeta =$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big((\overset{1}{X}_m(z),\ \overset{2}{X}_m(z)\Big)\Big(T_j(z),\ T_{k-|\varkappa_2|}(z)\Big)^T\Big)$$

и соотношение

$$X^+(x) - X^-(x) = -2\ B(x)\ D^{-1}(x)\ X^+(x), \qquad -1 < x < 1.$$

Далее с учетом асимптотического представления (см. лемму 2.1.2) при больших $|z|$ и $n > 0$

$$\sqrt{z^2-1}\,U_{n-1}(z) = T_n(z) + \frac{d_1^{(n)}}{z} + \frac{d_2^{(n)}}{z^2} + \cdots = T_n(z) + R_\infty^{(n)}\Big(\frac{1}{z}\Big), \tag{6.2.9}$$

из (6.2.6) вытекает формула (6.2.4). □

Следствие 6.2.1. *Принимая во внимание разложения*

$$\overset{l}{X}_m(z) = z^{-\varkappa_l}\Big(p_{|\varkappa_l|}^{(l,m)} + p_{|\varkappa_l|+1}^{(l,m)}\frac{1}{z} + \cdots\Big), \quad l,\, m = 1,\ 2,$$

$$\varkappa_1 \geqslant 0, \quad \varkappa_2 < 0,$$

имеющие место в окрестности бесконечно удаленной точки, а также представление (2.1.7), *из* (6.2.1), (6.2.2) *следуют соотношения:*

$$\mu_p^{(k,j)} = -2w^{(1)}, \qquad \nu_p^{(k,j)} = -2w^{(2)},$$

$$\lambda_p^{(k,j)} = -2v^{(1)}, \qquad \sigma_p^{(k,j)} = -2v^{(2)},$$

где при $m = 1,\ 2$

$$w^{(m)} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k-|\varkappa_2|}{2}\right]} g_{k-2r+1}^{(m)}\ a_r^{(k-|\varkappa_2|)} + \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{j-\varkappa_1}{2}\right]} y_{j-\varkappa_1-2r+1}^{(m)}\ a_r^{(j)}, & j \geqslant \varkappa_1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$v^{(m)} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k-|\varkappa_2|}{2}\right]} g_{k-2r+1}^{(m)}\ b_r^{(k-|\varkappa_2|)} + \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{j-\varkappa_1}{2}\right]} y_{j-\varkappa_1-2r+1}^{(m)}\ b_r^{(j)}, & j \geqslant \varkappa_1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$y_n^{(m)} = \sum_{l=0}^{n-1} p_{\varkappa_1+l}^{(1,m)}\, d_{n-l}^{(p+1)},$$

$$g_n^{(m)} = \sum_{l=0}^{n-1} p_{|\varkappa_2|+l}^{(2,m)}\, d_{n-l}^{(p+1)}, \quad n \geqslant 1,$$

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases}$$

$$\delta_N = N \bmod 2,$$

$$d_{2l-1+\delta_N}^{(N)} = 0,$$

$$d_{2l-\delta_N}^{(N)} = -\sum_{m=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_{\left[\frac{N-1}{2}\right]-m}^{(N-1)} e_{l+m-\delta_N}, \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,$$

$$e_0 = 0,5\,, \quad e_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4} e_k, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots\ .$$

6.2.2. Разложение характеристического оператора

Теорема 6.2.2. *Пусть на* $[-1,\ 1]$ *заданы матрицы* $A(x) = \Big(a_{l\,m}(x)\Big)_{l,\,m=1}^{2}$ *и* $B(x) = \Big(b_{l\,m}(x)\Big)_{l,\,m=1}^{2}$, *элементы которых принадлежат классу Гельдера, при этом* $\det(A(x) \pm B(x)) \neq\ 0\ \forall x \in [-1,\ 1]$. *Пусть далее* $X(z) = \Big(\overset{l}{X}_m\ (z)\Big)_{l,\,m=1}^{2}$ – *каноническая матрица задачи линейного сопряжения* (6.2.3), *частные индексы которой* $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 < 0$, $S_{n+\varkappa_1}^{(1)}(x)$, $S_{n-|\varkappa_2|}^{(2)}(x)$ – *алгебраические многочлены степеней* $n+\varkappa_1$, $n-|\varkappa_2| \geqslant 0$ *соответственно, т. е.*

$$\begin{aligned} S_{n+\varkappa_1}^{(1)}(x) &= \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} T_j(x), \\ S_{n-|\varkappa_2|}^{(2)}(x) &= \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} T_j(x). \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Тогда для $-1 < x < 1$ *имеет место представление*

$$A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x)\left(S_{n+\varkappa_1}^{(1)}(x), S_{n-|\varkappa_2|}^{(2)}(x)\right)^T +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\left(S_{n+\varkappa_1}^{(1)}(t), S_{n-|\varkappa_2|}^{(2)}(t)\right)^T \frac{dt}{t-x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0^{(1)} U_0(x) + \cdots + \alpha_n^{(1)} U_n(x) \\ \\ \alpha_0^{(2)} U_0(x) + \cdots + \alpha_n^{(2)} U_n(x) \end{pmatrix}, \tag{6.2.11}$$

коэффициенты $\alpha_q^{(m)}$, $q = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n,\ m = 1,\ 2$ *которого вычисляются по формулам*

$$\begin{gathered}\alpha_q^{(m)} = -2\sum_{j=q+2}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Q_1(j-q-1,m) - c_{q+1}^{(1)} Q_1(0,m) + \\ + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} V(q+j+1,m) + \sum_{j=0}^{s} c_j^{(2)} V(q-j+1,m) - c_{q+1}^{(2)} Q_2(0,m) - \\ - \sum_{j=q+2}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)}\Big[2\,Q_2(j-q-1,m) + V(j-q-1,m)\Big], \\ s = \min(q,\ n-|\varkappa_2|), \qquad m = 1,\ 2,\end{gathered} \tag{6.2.12}$$

где

$$Q_1(L,m) = \begin{cases} 0, & \varkappa_1 \geqslant 1,\ L+1 < \varkappa_1, \\ -\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{L+1-\varkappa_1}{2}\right]} a_k^{(L)} p_{L+1-2k}^{(1,m)}, & \varkappa_1 \geqslant 1,\ L+1 \geqslant \varkappa_1, \\ -\sum\limits_{k=0}^{[L/2]} a_k^{(L)} p_{L+1-2k}^{(1,m)}, & \varkappa_1 = 0, \end{cases}$$

$$V(L,m) = -\sum_{k=1}^{|\varkappa_2|+1} d_k^{(L)}\, p_{1-k+2|\varkappa_2|}^{(2,m)},$$

$$Q_2(L,m) = -\sum_{k=0}^{[L/2]} a_k^{(L)} p_{L+1-2k+2|\varkappa_2|}^{(2,m)},$$

$$d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N = 1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases} \qquad \delta_L = L \bmod 2,$$

$$d_{2l-1+\delta_L}^{(L)} = 0,$$

$$d_{2l-\delta_L}^{(L)} = -\sum_{m=0}^{\left[\frac{L-1}{2}\right]} b_{\left[\frac{L-1}{2}\right]-m}^{(L-1)} e_{l+m-\delta_L},$$

$$l = 1,\ 2,\ \dots,$$

$$e_0 = 0,5\,,$$

$$e_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4} e_k, \quad k = 0,\ 1,\ \dots\ .$$

Доказательство. Принимая во внимание известные равенства (1.1.1) и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}U_p(t)\,U_r(t)dt = \begin{cases} 0, & p \neq r, \\ 0,5, & p = r, \end{cases}$$

из (6.2.11) находим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x)\left(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(x), S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(x)\right)^{T}\sqrt{1-x^2}U_q(x)dx+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)D^{-1}(t)\,X^{+}(t)\left(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(t), S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(t)\right)^{T}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_q(x)\,\frac{dx}{t-x}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x)\left(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(x), S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(x)\right)^{T}U_q(x)dx+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)D^{-1}(t)\,X^{+}(t)\left(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(t), S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(t)\right)^{T}T_{q+1}(t)dt=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_q^{(1)}\\ \alpha_q^{(2)}\end{pmatrix}.$$

По аналогии с предыдущим нетрудно получить

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_q^{(1)}\\ \alpha_q^{(2)}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,\overset{1}{X}_1\,(z)S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)U_q(z)+\sqrt{z^2-1}\,\overset{2}{X}_1\,(z)S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\,U_q(z)\right)\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,\overset{1}{X}_2\,(z)S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)U_q(z)+\sqrt{z^2-1}\,\overset{2}{X}_2\,(z)S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\,U_q(z)\right)\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_1\,(z)S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)T_{q+1}(z)+\overset{2}{X}_1\,(z)S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\,T_{q+1}(z)\right)\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_2\,(z)S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)T_{q+1}(z)+\overset{2}{X}_2\,(z)S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\,T_{q+1}(z)\right)\end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}\alpha_q^{(m)}=\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m\,(z)\left[\sqrt{z^2-1}U_q(z)-T_{q+1}(z)\right]S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)\right)+$$

$$+\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m\,(z)\left[\sqrt{z^2-1}U_q(z)-T_{q+1}(z)\right]S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\right),\qquad m=1,2.$$

С учетом представлений (6.2.10) последние соотношения принимают вид

$$\frac{1}{2}\alpha_q^{(m)}=\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1}c_j^{(1)}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m\,(z)\left[\sqrt{z^2-1}U_q(z)\,T_j(z)-T_{q+1}(z)\,T_j(z)\right]\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|}c_k^{(2)}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m\,(z)\left[\sqrt{z^2-1}U_q(z)\,T_k(z)-T_{q+1}(z)\,T_k(z)\right]\right),\ m=1,2.\quad(6.2.13)$$

Используя тождества (2.2.1), а затем представление (2.1.11), равенства (6.2.13) запишем в виде

$$\alpha_q^{(m)} = \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Bigg(\overset{1}{X}_m(z)\Big[(\sqrt{z^2-1}U_{j+q}(z) - T_{j+q+1}(z)) +$$

$$+ \left(\sqrt{z^2-1}U_{q-j}(z) - T_{q-j+1}(z)\right)\Big]\Bigg) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|} c_k^{(2)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Bigg(\overset{2}{X}_m(z)\Big[(\sqrt{z^2-1}U_{k+q}(z) - T_{k+q+1}(z)) +$$

$$+ (\sqrt{z^2-1}U_{q-k}(z) - T_{q-k+1}(z))\Big]\Bigg),$$

или

$$\alpha_q^{(m)} = \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m(z)R_\infty^{(j+q+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) + \sum_{j=0}^{q} c_j^{(1)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m(z)R_\infty^{(q-j+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) -$$

$$- \sum_{j=q+2}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m(z)\left[2T_{j-q-1}(z) + R_\infty^{(j-q-1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m(z)R_\infty^{(j+q+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) + \sum_{j=0}^{q} c_j^{(2)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m(z)R_\infty^{(q-j+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) -$$

$$- \sum_{j=q+2}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m(z)\left[2T_{j-q-1}(z) + R_\infty^{(j-q-1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\right) -$$

$$- c_{q+1}^{(1)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m(z)\,T_0(z)\right) - c_{q+1}^{(2)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m(z)\,T_0(z)\right),\ m = 1, 2. \tag{6.2.14}$$

Вычеты подсчитаем в явном виде. Учитывая, что при $N \geqslant 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m(z)R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{p_{\varkappa_1+l}^{(1,m)}}{z^{\varkappa_1+l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{(N)}}{z^k}\right) = \begin{cases}-1, & \varkappa_1 = 0,\ N = 0,\\ 0, & \text{иначе},\end{cases}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m(z)R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{p_{|\varkappa_2|+l}^{(2,m)}}{z^{\varkappa_2+l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{(N)}}{z^k}\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{|\varkappa_2|+1} d_k^{(N)}\, p_{1-k+2|\varkappa_2|}^{(2,m)} = V(N, m),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\overset{1}{X}_m(z)\,T_N(z)\Big)=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{p^{(1,m)}_{\varkappa_1+l}}{z^{\varkappa_1+l}}\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}a_k^{(N)}z^{N-2k}\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & \varkappa_1\geqslant 1,\ N+1<\varkappa_1,\\ -\sum\limits_{k=0}^{[\frac{N+1-\varkappa_1}{2}]}a_k^{(N)}p^{(1,m)}_{N+1-2k}, & \varkappa_1\geqslant 1,\ N+1\geqslant\varkappa_1,\\ -\sum\limits_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}a_k^{(N)}p^{(1,m)}_{N+1-2k}, & \varkappa_1=0,\end{cases}=Q_1(N,m),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\overset{2}{X}_m(z)\,T_N(z)\Big)=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{p^{(2,m)}_{|\varkappa_2|+l}}{z^{\varkappa_2+l}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]}a_k^{(N)}z^{N-2k}\right)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]}a_k^{(N)}p^{(2,m)}_{N+1-2k+2|\varkappa_2|}=Q_2(N,m),$$

равенства (6.2.14) принимают вид (6.2.12). □

Теорема 6.2.3. *Пусть на* $[-1,\ 1]$ *заданы матрицы* $A(x)=\Big(a_{k\,j}(x)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$ *и* $B(x)=\Big(b_{k\,j}(x)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$, *элементы которых непрерывны по Гельдеру, при этом* $\det(A(x)\pm B(x))\neq 0$ $\forall x\in[-1,\ 1]$. *Пусть далее* $X(z)=\Big(\overset{k}{X}_j(z)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$ *– каноническая матрица задачи линейного сопряжения* (6.1.1), *частные индексы которой* $\varkappa_1\geqslant 0$, $\varkappa_2<0$, $S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(x)$, $S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(x)$ *– алгебраические многочлены степеней* $n+\varkappa_1$, $n-|\varkappa_2|\geqslant 0$ *соответственно, т. е.*

$$\begin{aligned}S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(x)&=\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1}c_j^{(1)}U_j(x),\\ S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(x)&=\sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|}c_j^{(2)}U_j(x).\end{aligned}\tag{6.2.15}$$

Тогда для $-1<x<1$ *имеет место представление*

$$A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x)\left(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(x),S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(x)\right)^{T}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\left(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(t),S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(t)\right)^{T}\frac{dt}{t-x}=$$

$$=\left(\mu_0^{(1)}U_0(x)+\dots+\mu_n^{(1)}U_n(x)\mu_0^{(2)}U_0(x)+\dots+\mu_n^{(2)}U_n(x)\right),\tag{6.2.16}$$

коэффициенты $\mu_q^{(m)}$, $q = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n,\ m = 1,\ 2,$ *которого вычисляются по формулам*

$$\mu_q^{(m)} = -2\sum_{j=q+1}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Q_3(j-q-1,m) + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} M_2(q+j+2,m) -$$

$$- c_q^{(1)} M_1(0,m) - \sum_{j=0}^{\min(q,n-|\varkappa_2|)} c_j^{(2)} M_2(q-j,m) -$$

$$- \sum_{j=q+1}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} \Big[2\, Q_4(j-q-1,m) + M_2(j-q,m) \Big], \qquad m = 1,\ 2, \tag{6.2.17}$$

где

$$M_1(N,m) = \begin{cases} -1, & \varkappa_1 = 0,\ N = 0, \\ 0, & \text{\textit{иначе}}, \end{cases}$$

$$M_2(N,m) = -\sum_{k=1}^{|\varkappa_2|+1} d_k^{(N)}\ p_{1-k+2|\varkappa_2|}^{(2,m)},$$

$$d_{2l-1+\delta_N}^{(N)} = 0, \quad d_{2l-\delta_N}^{(N)} = \sum_{m=0}^{[\frac{N}{2}]} a_{[\frac{N}{2}]-m}^{(N)} e_{l+m-\delta_N}, \quad l = 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$\delta_N = (N+1) \bmod 2,$$

$$e_0 = 1, \quad e_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}\, e_k, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,$$

$$Q_3(L,m) = \begin{cases} 0, & \varkappa_1 \geqslant 1,\ L+1 < \varkappa_1, \\ -\sum\limits_{k=0}^{[\frac{L+1-\varkappa_1}{2}]} b_k^{(L)} p_{L+1-2k}^{(1,m)}, & \varkappa_1 \geqslant 1,\ L+1 \geqslant \varkappa_1, \\ -\sum\limits_{k=0}^{[L/2]} b_k^{(L)} p_{L+1-2k}^{(1,m)}, & \varkappa_1 = 0, \end{cases}$$

$$Q_4(L,m) = -\sum_{k=0}^{[L/2]} b_k^{(L)} p_{L+1-2k-2\varkappa_2}^{(2,m)}.$$

Доказательство. Принимая во внимание известные равенства (1.1.1) и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, U_p(t)\, U_r(t) dt = \begin{cases} 0, & p \neq r, \\ 0,5, & p = r, \end{cases}$$

из (6.2.16) находим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x)\Big(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(x), S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(x)\Big)^T\sqrt{1-x^2}U_q(x)dx +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)D^{-1}(t)\,X^{+}(t)\Big(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(t), S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(t)\Big)^T\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_q(x)\,\frac{dx}{t-x}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}A(x)D^{-1}(x)X^{+}(x)\Big(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(x), S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(x)\Big)^T U_q(x)dx +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)D^{-1}(t)\,X^{+}(t)\Big(S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(t), S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(t)\Big)^T T_{q+1}(t)dt = \frac{1}{2}\Big(\mu^{(1)}_q, \mu^{(2)}_q\Big)^T.$$

Подобно предыдущему

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mu^{(1)}_q\\ \mu^{(2)}_q\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,\overset{1}{X}_1(z)S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)U_q(z)+\sqrt{z^2-1}\,\overset{2}{X}_1(z)S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\,U_q(z)\right)\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,\overset{1}{X}_2(z)S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)U_q(z)+\sqrt{z^2-1}\,\overset{2}{X}_2(z)S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\,U_q(z)\right)\end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_1(z)S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)T_{q+1}(z)+\overset{2}{X}_1(z)S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\,T_{q+1}(z)\right)\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_2(z)S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)T_{q+1}(z)+\overset{2}{X}_2(z)S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\,T_{q+1}(z)\right)\end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}\mu^{(m)}_q = \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m(z)\Big[\sqrt{z^2-1}U_q(z)-T_{q+1}(z)\Big]S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(z)\right)+$$

$$+\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m(z)\Big[\sqrt{z^2-1}U_q(z)-T_{q+1}(z)\Big]\,S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(z)\right),\quad m=1,2.$$

С учетом представлений (6.2.15) последние соотношения принимают вид

$$\frac{1}{2}\mu^{(m)}_q = \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c^{(1)}_j \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_m(z)\Big[\sqrt{z^2-1}U_q(z)\,U_j(z)-T_{q+1}(z)\,U_j(z)\Big]\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|} c^{(2)}_k \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_m(z)\Big[\sqrt{z^2-1}U_q(z)\,U_k(z)-T_{q+1}(z)\,U_k(z)\Big]\right), \tag{6.2.18}$$

$$m=1,2.$$

Используя тождества (2.2.1), а также представление (2.1.9), равенства (6.2.18) запишем в виде

$$\mu_q^{(m)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} \left(\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{1}{X}_m (z) \left[\left(\frac{T_{j+q+2}(z)}{\sqrt{z^2-1}} - U_{j+q+1}(z) \right) - \left(\frac{T_{j-q}(z)}{\sqrt{z^2-1}} + U_{j-q-1}(z) \right) \right] \right) \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|} c_k^{(2)} \left(\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{2}{X}_m (z) \left[\left(\frac{T_{k+q+2}(z)}{\sqrt{z^2-1}} - U_{k+q+1}(z) \right) - \left(\frac{T_{k-q}(z)}{\sqrt{z^2-1}} + U_{k-q-1}(z) \right) \right] \right) \right).$$

или

$$\mu_q^{(m)} = \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{1}{X}_m (z) R_\infty^{(j+q+2)} \left(\frac{1}{z} \right) \right) - \sum_{j=0}^{q} c_j^{(1)} \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{1}{X}_m (z) R_\infty^{(q-j)} \left(\frac{1}{z} \right) \right) -$$

$$- \sum_{j=q+1}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{1}{X}_m (z) \left[2U_{j-q-1}(z) + R_\infty^{(j-q)} \left(\frac{1}{z} \right) \right] \right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{2}{X}_m (z) R_\infty^{(j+q+2)} \left(\frac{1}{z} \right) \right) - \sum_{j=0}^{q} c_j^{(2)} \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{2}{X}_m (z) R_\infty^{(q-j)} \left(\frac{1}{z} \right) \right) -$$

$$- \sum_{j=q+1}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{2}{X}_m (z) \left[2U_{j-q-1}(z) + R_\infty^{(j-q)} \left(\frac{1}{z} \right) \right] \right), \; m = 1, 2. \qquad (6.2.19)$$

Учитывая, что при $N \geqslant 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{1}{X}_m R_\infty^{(N)} \right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{p_{\varkappa_1+l}^{(1,m)}}{z^{\varkappa_1+l}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^{(N)}}{z^k} \right) = \begin{cases} -1, & \varkappa_1 = 0, \; N = 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} =$$

$$= M_1(N, m),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{2}{X}_m R_\infty^{(N)} \right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{p_{-\varkappa_2+l}^{(2,m)}}{z^{\varkappa_2+l}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^{(N)}}{z^k} \right) = - \sum_{k=1}^{|\varkappa_2|+1} d_k^{(N)} \, p_{1-k-2\varkappa_2}^{(2,m)} =$$

$$= M_2(N, m),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\overset{2}{X}_m u_n \right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{p_{-\varkappa_2+l}^{(2,m)}}{z^{\varkappa_2+l}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} b_k^{(N)} z^{N-2k} \right) =$$

$$= - \sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} b_k^{(N)} p_{N+1-2k-2\varkappa_2}^{(2,m)} = Q_4(N, m),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Bigl(\overset{1}{X}_m\, u_n\Bigr) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{p^{(1,m)}_{\varkappa_1+l}}{z^{\varkappa_1+l}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} b_k^{(N)} z^{N-2k}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \varkappa_1 \geqslant 1,\ N+1 < \varkappa_1, \\ -\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{N+1-\varkappa_1}{2}\right]} b_k^{(N)} p^{(1,m)}_{N+1-2k}, & \varkappa_1 \geqslant 1,\ N+1 \geqslant \varkappa_1, \\ -\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} b_k^{(N)} p^{(1,m)}_{N+1-2k}, & \varkappa_1 = 0, \end{cases} = Q_3(N,m),$$

равенства (6.2.19) принимают вид (6.2.17). □

6.2.3. Разложение обратного оператора

Теорема 6.2.4. *Пусть на* $[-1,\ 1]$ *заданы матрицы* $A(x) = \Bigl(a_{k\,j}(x)\Bigr)_{k,\,j=1}^{2}$ *и* $B(x) = \Bigl(b_{k\,j}(x)\Bigr)_{k,\,j=1}^{2}$, *элементы которых непрерывны по Гельдеру, при этом* $\det(A(x) \pm B(x)) \neq 0\ \forall x \in [-1,\ 1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая матрица задачи линейного сопряжения* (6.1.1), *частные индексы которой* $\varkappa_1 \geqslant 0,\ \varkappa_2 < 0$, *элементы обратной матрицы* $X^{-1}(z) = \Bigl(\overset{k}{\chi}_j\,(z)\Bigr)_{k,\,j=1}^{2}$ *в окрестности точек* $z = \pm 1$ *допускают оценки* $\left|\overset{k}{\chi}_j\,(z)\right| \leqslant \dfrac{\text{const}}{|z-c|^{\mu}}$, $\mu < 0,5$, $c = \pm 1$, $k,\ j = 1,\ 2$, $f_n^{(1)}(x)$, $f_n^{(2)}(x)$ *– алгебраические многочлены степеней* n

$$\begin{aligned} f_n^{(1)}(x) &= \sum_{j=0}^{n} f_j^{(1)} U_j(x), \\ f_n^{(2)}(x) &= \sum_{j=0}^{n} f_j^{(2)} U_j(x). \end{aligned} \tag{6.2.20}$$

Тогда справедливо представление

$$\bigl(X^+(x)\bigr)^{-1} A(x) S^{-1}(x) \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x) \\ f_n^{(2)}(x) \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} \bigl(X^+(t)\bigr)^{-1} B(t) S^{-1}(t) \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x) \\ f_n^{(2)}(x) \end{pmatrix} \frac{dt}{t-x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_0^{(1)} T_0(x) + \cdots + \beta^{(1)}_{n+\varkappa_1} T_{n+\varkappa_1}(x) \\ \\ \beta_0^{(2)} T_0(x) + \cdots + \beta^{(2)}_{n-|\varkappa_2|} T_{n-|\varkappa_2|}(x) \end{pmatrix}, \tag{6.2.21}$$

коэффициенты $\beta_q^{(1)},\ q=0,\ 1,\ \dots\ ,\ n+\varkappa_1,\quad \beta_q^{(2)},\ q=0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-|\varkappa_2|$, *которого вычисляются по формулам*

$$\eta_q\beta_q^{(2)} = -\sum_{j=0}^{n} f_j^{(1)} G_2(j-q+1,1) - \sum_{j=0}^{n} f_j^{(2)} G_2(j-q+1,2),$$
$$q=0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-|\varkappa_2|,$$

$$\begin{aligned}
\eta_q\beta_q^{(1)} = &-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{n} f_j^{(1)} H(q+j+1,1) + \right.\\
&+\sum_{j=q}^{n} f_j^{(1)}\Big(2G_1(j-q+1,1)+H(j-q+1,1)\Big) -\\
&\left.-\sum_{j=0}^{\min(q-2,n)} f_j^{(1)} H(q-j-1,1) + f_{q-1}^{(1)} G_1(0,1)\right] -\\
&-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{n} f_j^{(2)} H(q+j+1,2) + \right.\\
&+\sum_{j=q}^{n} f_j^{(2)}\Big(2G_1(j-q+1,2)+H(j-q+1,2)\Big) -\\
&\left.-\sum_{j=0}^{\min(q-2,n)} f_j^{(2)} H(q-j-1,2) + f_{q-1}^{(2)} G_1(0,2)\right],\\
&q=0,\ 1,\ \dots\ ,\ n+\varkappa_1,
\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

где

$$\begin{aligned}
&\eta_q = \begin{cases} 0,5\,, & q\neq 0,\\ 1 & q=0,\end{cases}\\
&\tau_m^{(N)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} d_{m-2k}^{(N)},\\
&d_1^{(N)} = \begin{cases} -0,5\,, & N=1,\\ 0, & N\neq 1,\end{cases}\\
&d_{2l-1+\delta_N}^{(N)} = 0,\\
&d_{2l-\delta_N}^{(N)} = -\sum_{m=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_{\left[\frac{N-1}{2}\right]-m}^{(N-1)} e_{l+m-\delta_N},\\
&\qquad l=1,\ 2,\ \cdots\ ,\\
&\delta_N = N \bmod 2,
\end{aligned}$$

$$e_0 = 0,5\,,$$
$$e_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4} e_k, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots .$$
$$H(N,r) = \begin{cases} -\sum\limits_{m=3}^{\varkappa_1+1} \tau_m^{(N)} \rho_{1-m+2\varkappa_1}^{(r,1)} & \varkappa_1 \geqslant 2, \\ 0, & \varkappa_1 = 0,\ \varkappa_1 = 1, \end{cases}$$
$$h_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1 & l \geqslant [\frac{N}{2}], \end{cases}$$
$$G_1(N,r) = -\sum_{k=0}^{[\frac{N+\varkappa_1-1}{2}]} h_k^{(N)} \rho_{N-1-2k+2\varkappa_1}^{(r,1)},$$
$$G_2(N,r) = \begin{cases} 0, & N < |\varkappa_2| + 1, \\ -\sum\limits_{k=0}^{[(N-1-|\varkappa_2|)/2]} h_k^{(N)} \rho_{N-1-2k}^{(r,2)}, & N \geqslant |\varkappa_2| + 1. \end{cases}$$

Доказательство. Учитывая (1.1.1) и

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_q(t)\, T_p(t) dt = \begin{cases} 0, & q \neq p, \\ 0,5\,, & q = p \neq 0, \\ 1, & q = p = 0, \end{cases}$$

и полагая $\eta_q = \begin{cases} 0,5\,, & q \neq 0, \\ 1, & q = 0, \end{cases}$ из (6.2.21), подобно предыдущему, находим

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(X^+(x)\right)^{-1} A(x) S^{-1}(x) \Big(f_n^{(1)}(x), f_n^{(2)}(x)\Big)^T \frac{T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - \\ - \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \left(X^+(t)\right)^{-1} B(t) S^{-1}(t) \Big(f_n^{(1)}(t), f_n^{(2)}(t)\Big)^T \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{t-x} dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(X^+(x)\right)^{-1} A(x) S^{-1}(x) \Big(f_n^{(1)}(x), f_n^{(2)}(x)\Big)^T T_q(x) dx + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \left(X^+(t)\right)^{-1} B(t) S^{-1}(t) \Big(f_n^{(1)}(t), f_n^{(2)}(t)\Big)^T U_{q-1}(t) dt = \\ = \eta_q \begin{pmatrix} \beta_q^{(1)} \\ \delta_q \beta_q^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad q = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n + \varkappa_1, \\ \delta_q = \begin{cases} 1, & q \leqslant n - |\varkappa_2|, \\ 0, & q > n - |\varkappa_2|. \end{cases} \end{gathered} \tag{6.2.23}$$

Как и ранее, чтобы упростить (6.2.23), введем некоторые вспомогательные интегралы. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-1}}X^{-1}(\zeta)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(\zeta)\\ f_n^{(2)}(\zeta)\end{pmatrix}T_q(\zeta)d\zeta =$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}X^{-1}(z)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z)\\ f_n^{(2)}(z)\end{pmatrix}T_q(z)\Big),$$

где Λ – замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\ 1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки. Деформируем Λ в двубережный отрезок $[-1,\ 1]$ и получим

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}X^{-1}(z)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z)\\ f_n^{(2)}(z)\end{pmatrix}T_q(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{i\sqrt{1-x^2}}\left(X^+(x)\right)^{-1}\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x)\\ f_n^{(2)}(x)\end{pmatrix}T_q(x)dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1}^{-1}\frac{1}{(-i)\sqrt{1-x^2}}\left(X^-(x)\right)^{-1}\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x)\\ f_n^{(2)}(x)\end{pmatrix}T_q(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\left(X^+(x)\right)^{-1}+\left(X^-(x)\right)^{-1}\right)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x)\\ f_n^{(2)}(x)\end{pmatrix}T_q(x)dx. \tag{6.2.24}$$

Так как из (6.1.1) следует, что $X^+ = (D\,S^{-1})\,X^-$, то $(X^+)^{-1} = (X^-)^{-1}(D\,S^{-1})^{-1}$, или $(X^-)^{-1} = (X^+)^{-1}DS^{-1}$.

Теперь

$$\left(X^+\right)^{-1}+\left(X^-\right)^{-1} = \left(X^+\right)^{-1}\left(E+D\,S^{-1}\right) = \left(X^+\right)^{-1}(S+D)\,S^{-1} = 2\left(X^+\right)^{-1}A\,S^{-1}.$$

Подставим это в (6.2.24) и получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\left(X^+(x)\right)^{-1}A(x)S^{-1}(x)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x)\\ f_n^{(2)}(x)\end{pmatrix}dx =$$

$$= -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{T_q(z)}{\sqrt{z^2-1}}X^{-1}(z)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z)\\ f_n^{(2)}(z)\end{pmatrix}\right).$$

Далее имеем такой результат

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}X^{-1}(\zeta)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(\zeta)\\ f_n^{(2)}(\zeta)\end{pmatrix}U_{q-1}(\zeta)d\zeta = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X^{-1}(z)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z)\\ f_n^{(2)}(z)\end{pmatrix}U_{q-1}(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(\left(X^+(x)\right)^{-1}-\left(X^+(x)\right)^{-1}\right)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x)\\ f_n^{(2)}(x)\end{pmatrix}U_{q-1}(x)dx.$$

Снова подсчитаем $(X^+)^{-1} - (X^-)^{-1}$ и получим $(X^+)^{-1} - (X^-)^{-1} = 2\,(X^+)^{-1}\,B\,S^{-1}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(X^+(t)\right)^{-1}B(t)S^{-1}(t)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(t)\\ f_n^{(2)}(t)\end{pmatrix}U_{q-1}(t)dt = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X^{-1}(z)\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z)\\ f_n^{(2)}(z)\end{pmatrix}U_{q-1}(z)\right).$$

Значит,

$$\eta_q\begin{pmatrix}\beta_q^{(1)}\\ \delta_q\beta_q^{(2)}\end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\overset{1}{\chi}_1(z)f_n^{(1)}(z)T_q(z) + \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\overset{2}{\chi}_1(z)f_n^{(2)}(z)\,T_q(z)\Big)\\ \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\overset{1}{\chi}_2(z)f_n^{(1)}(z)T_q(z) + \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\overset{2}{\chi}_2(z)f_n^{(2)}(z)\,T_q(z)\Big)\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\overset{1}{\chi}_1(z)f_n^{(1)}(z)U_{q-1}(z) + \overset{2}{\chi}_1(z)f_n^{(2)}(z)\,U_{q-1}(z)\Big)\\ \operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\overset{1}{\chi}_2(z)f_n^{(1)}(z)T_{q+1}(z) + \overset{2}{\chi}_2(z)f_n^{(2)}(z)\,T_{q+1}(z)\Big)\end{pmatrix},$$

или, с учетом представлений (6.2.20), имеем

$$\begin{gathered}\eta_q\beta_q^{(m)} = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\overset{1}{\chi}_m(z)\Big[\frac{T_q(z)}{\sqrt{z^2-1}} - U_{q-1}(z)\Big]f_n^{(1)}(z) + \\ + \overset{2}{\chi}_m(z)\Big[\frac{T_q(z)}{\sqrt{z^2-1}} - U_{q-1}(z)\Big]f_n^{(2)}(z)\Big) = \\ = -\sum_{r=1}^{2}\sum_{j=0}^{n}f_j^{(r)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{r}{\chi}_m(z)\Big[\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}T_q(z)\,U_j(z) - U_{q-1}(z)\,U_j(z)\Big]\right), \\ m=1,2.\end{gathered} \tag{6.2.25}$$

Используя тождества (2.2.1), равенства (6.2.25) запишем в виде

$$\begin{gathered}2\eta_q\beta_q^{(m)} = -\sum_{r=1}^{2}\sum_{j=0}^{n}f_j^{(r)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\Big(\frac{\overset{r}{\chi}_m(z)}{z^2-1}\Big[\sqrt{z^2-1}\,U_{j+q}(z) - \\ - T_{j+q+1}(z) + \sqrt{z^2-1}U_{j-q}(z) + T_{j-q+1}(z)\Big]\Big).\end{gathered}$$

Теперь снова учтем представление (2.1.11) и получим

$$2\eta_q \beta_q^{(m)} = -\sum_{r=1}^{2}\Bigg[\sum_{j=0}^{n} f_j^{(r)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{\overset{r}{\chi}_m(z)}{z^2-1} R_\infty^{(j+q+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) -$$

$$-\sum_{j=0}^{q-2} f_j^{(r)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{\overset{r}{\chi}_m(z)}{z^2-1} R_\infty^{(q-j-1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) +$$

$$+\sum_{j=q}^{n} f_j^{(r)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{\overset{r}{\chi}_m(z)}{z^2-1}\left(2T_{j-q+1}(z) + R_\infty^{(j-q+1)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right) +$$

$$+ f_{q-1}^{(r)} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{\overset{r}{\chi}_m(z)}{z^2-1} T_0(z)\right)\Bigg]. \tag{6.2.26}$$

Далее, в окрестности бесконечно удаленной точки имеют место разложения ($N \geqslant 0$)

$$\frac{T_N(z)}{z^2-1} = \left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2l}}\right)\left(\sum_{m=0}^{[\frac{N}{2}]} a_m^{(N)} z^{N-2m}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} h_l^{(N)} z^{N-2l-2},$$

$$h_l^{(N)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{l} a_m^{(N)}, & l < [\frac{N}{2}], \\ 1 & l \geqslant [\frac{N}{2}], \end{cases}$$

и

$$R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{(N)}}{z^k}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2l}}\right) = \sum_{m=3}^{\infty}\tau_m^{(N)} z^m, \quad \tau_m^{(N)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} d_{m-2k}^{(N)}.$$

Так как при $N \geqslant 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{\overset{r}{\chi}_1(z)}{z^2-1} R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\rho_{\varkappa_1+l}^{(r,1)}}{z^{-\varkappa_1+l}}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{\tau_m^{(N)}}{z^m}\right) =$$

$$= \begin{cases} -\sum\limits_{m=3}^{\varkappa_1+1}\tau_m^{(N)}\rho_{1-m+2\varkappa_1}^{(r,1)}, & \varkappa_1 \geqslant 2, \\ 0, & \varkappa_1 < 2, \end{cases} = H(N,r),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{\overset{r}{\chi}_2(z)}{z^2-1} R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\rho_{|\varkappa_2|+l}^{(r,2)}}{z^{|\varkappa_2|+l}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{(N)}}{z^k}\right) = 0,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{r}{\chi}_1(z)\frac{T_N(z)}{z^2-1}\right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\rho_{\varkappa_1+l}^{(r,1)}}{z^{-\varkappa_1+l}}\sum_{l=0}^{\infty} h_l^{(N)} z^{N-2l-2}\right) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{[\frac{N+\varkappa_1-1}{2}]} h_k^{(N)}\rho_{N-1-2k+2\varkappa_1}^{(r,1)} = G_1(N,r),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{r}{\chi}_2(z)\frac{T_N(z)}{z^2-1}\right)=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\rho^{(r,2)}_{|\varkappa_2|+l}}{z^{|\varkappa_2|+l}}\sum_{l=0}^{\infty}h_l^{(N)}z^{N-2l-2}\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & N<|\varkappa_2|+1,\\ -\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{(N-1-|\varkappa_2|)}{2}\right]}h_k^{(N)}\rho^{(r,2)}_{N-1-2k}, & N\geqslant|\varkappa_2|+1,\end{cases}=G_2(N,r),$$

то равенства (6.2.26) принимают вид (6.2.22). □

Теорема 6.2.5. *Пусть на* $[-1,\ 1]$ *заданы матрицы* $A(x)=\Big(a_{k\,j}(x)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$ *и* $B(x)=\Big(b_{k\,j}(x)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$*, элементы которых непрерывны по Гельдеру, при этом* $\det(A(x)\pm B(x))\neq 0\quad\forall x\in[-1,\ 1]$*. Пусть далее* $X(z)=\Big(\overset{k}{X}_j(z)\Big)_{k,\,j=1}^{2}$ *– каноническая матрица задачи линейного сопряжения* (6.1.1)*, частные индексы которой* $\varkappa_1\geqslant 0, \varkappa_2<0,\ f_n^{(1)}(x), f_n^{(2)}(x)$ *– алгебраические многочлены степеней* n

$$\begin{aligned}f_n^{(1)}(x)&=\sum_{j=0}^{n}f_j^{(1)}U_j(x),\\ f_n^{(2)}(x)&=\sum_{j=0}^{n}f_j^{(2)}U_j(x).\end{aligned}\tag{6.2.27}$$

Тогда справедливо представление

$$\begin{gathered}\left(X^+(x)\right)^{-1}A(x)S^{-1}(x)\Big(f_n^{(1)}(x),f_n^{(2)}(x)\Big)^T-\\ -\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\left(X^+(t)\right)^{-1}B(t)S^{-1}(t)\Big(f_n^{(1)}(t),f_n^{(2)}(t)\Big)^T\frac{dt}{t-x}=\\ =\begin{pmatrix}\nu_0^{(1)}U_0(x)+\dots+\nu^{(1)}_{n+\varkappa_1}U_{n+\varkappa_1}(x)\\ \nu_0^{(2)}U_0(x)+\dots+\nu^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}U_{n-|\varkappa_2|}(x)\end{pmatrix},\end{gathered}\tag{6.2.28}$$

коэффициенты $\nu_q^{(1)}$, $q=0,\ 1,\ \dots,\ n+\varkappa_1$, $\quad\nu_r^{(2)}$, $r=0,\ 1,\ \dots,\ n-|\varkappa_2|$*, которого вычисляются по формулам*

$$\nu_r^{(2)}=-2\sum_{j=r+1}^{n}f_j^{(1)}G_4(j-r-1,1)-2\sum_{j=r+1}^{n}f_j^{(2)}G_4(j-r-1,2),$$

$$r=0,\ 1,\ \dots,\ n-|\varkappa_2|,$$

$$
\begin{aligned}
\nu_q^{(1)} = &\sum_{j=0}^{n} f_j^{(1)} H(q+j+2,1) - \\
&- \sum_{j=q+1}^{n} f_j^{(1)} \Big[2\, G_3(j-q-1,1) + H(j-q,1) \Big] - \\
&- \sum_{j=0}^{\min(q,n)} f_j^{(1)} H(q-j,1) + \sum_{j=0}^{n} f_j^{(2)} H(q+j+2,2) - \\
&- \sum_{j=0}^{\min(q,n)} f_j^{(2)} H(q-j,2) - \\
&- \sum_{j=q+1}^{n} f_j^{(2)} \Big[2\, G_3(j-q-1,2) + H(j-q,2) \Big], \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad q = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n + \varkappa_1,
\end{aligned}
\tag{6.2.29}
$$

при

$$
\begin{aligned}
&H(N,j) = -\sum_{k=1}^{\varkappa_1+1} d_k^{(N)}\ \rho_{1-k+2\,\varkappa_1}^{(j,1)}, \\
&e_0 = 1, \\
&e_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}\, e_k, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots, \\
&d_1^{(N)} = \begin{cases} 1, & N = 0, \\ 0, & N \neq 0, \end{cases} \\
&d_2^{(N)} = \begin{cases} 0,5\,, & N = 0, \\ 0, & N \neq 0, \end{cases} \quad d_{2l-1+\delta_N}^{(N)} = 0, \\
&d_{2l-\delta_N}^{(N)} = \sum_{m=0}^{[\frac{N}{2}]} a_{[\frac{N}{2}]-m}^{(N)} e_{l+m-\delta_N}, \quad l = 1,\ 2,\ \cdots, \\
&\quad \delta_N = (N+1) \bmod 2, \\
&G_3(N,j) = -\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} b_k^{(N)} \rho_{N+1-2k+2\varkappa_1}^{(j,1)},
\end{aligned}
$$

$$
G_4(m,j) = \begin{cases} 0, & m+1 < |\varkappa_2|, \\ -\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{m+1-|\varkappa_2|}{2}\right]} b_k^{(m)} \rho_{m+1-2k}^{(j,2)}, & m+1 \geqslant |\varkappa_2|, \end{cases}
$$

Доказательство. Подобно предыдущему из (6.2.28) находим

$$
\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(X^+(x) \right)^{-1} A(x) S^{-1}(x) \Big(f_n^{(1)}(x), f_n^{(2)}(x) \Big)^T \sqrt{1-x^2}\, U_q(x) dx -
$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(X^+(t)\right)^{-1}B(t)S^{-1}(t)\Big(f_n^{(1)}(t),f_n^{(2)}(t)\Big)^T\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_q(x)\frac{dx}{t-x}\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(X^+(x)\right)^{-1}A(x)S^{-1}(x)\Big(f_n^{(1)}(x),f_n^{(2)}(x)\Big)^T U_q(x)dx-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(X^+(t)\right)^{-1}B(t)S^{-1}(t)\Big(f_n^{(1)}(t),f_n^{(2)}(t)\Big)^T T_{q+1}(t)dt=\frac{1}{2}\Big(\nu_q^{(1)},\delta_q\nu_q^{(2)}\Big)^T,$$

$$\delta_q=\begin{cases}1, & q\leqslant n-|\varkappa_2|,\\ 0, & q>n-|\varkappa_2|.\end{cases}\qquad(6.2.30)$$

$$q=0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n+\varkappa_1,$$

Как и ранее, чтобы упростить (6.2.30), введем некоторые вспомогательные интегралы. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\sqrt{\zeta^2-1}\,X^{-1}(\zeta)\Big(f_n^{(1)}(\zeta),f_n^{(2)}(\zeta)\Big)^T U_q(\zeta)d\zeta=$$

$$=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,X^{-1}(z)\Big(f_n^{(1)}(z),f_n^{(2)}(z)\Big)^T U_q(z)\right),$$

где Λ – замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,\ 1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки. Деформируем Λ в двубережный отрезок $[-1,\ 1]$ и получим

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,X^{-1}(z)\left(f_n^{(1)}(z),f_n^{(2)}(z)\right)^T U_q(z)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}i\sqrt{1-x^2}\left(X^+(x)\right)^{-1}\Big(f_n^{(1)}(x),f_n^{(2)}(x)\Big)^T U_q(x)dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1}^{-1}(-i)\sqrt{1-x^2}\left(X^-(x)\right)^{-1}\Big(f_n^{(1)}(x),f_n^{(2)}(x)\Big)^T U_q(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(\left(X^+(x)\right)^{-1}+\left(X^-(x)\right)^{-1}\right)\Big(f_n^{(1)}(x),f_n^{(2)}(x)\Big)^T U_q(x)dx.\qquad(6.2.31)$$

Так как

$$X^+=\left(D\,S^{-1}\right)\,X^-,$$

то

$$\left(X^+\right)^{-1}=\left(X^-\right)^{-1}\left(D\,S^{-1}\right)^{-1},$$

или
$$\left(X^-\right)^{-1}=\left(X^+\right)^{-1}D\,S^{-1}.$$
Поэтому
$$\left(X^+\right)^{-1}+\left(X^-\right)^{-1}=\left(X^+\right)^{-1}\left(E+D\,S^{-1}\right)=\left(X^+\right)^{-1}(S+D)\,S^{-1}=2\left(X^+\right)^{-1}\,A\,S^{-1}.$$

Подставим это в (6.2.31) и получим
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(X^+(x)\right)^{-1}A(x)S^{-1}(x)\Big(f_n^{(1)}(x),f_n^{(2)}(x)\Big)^T U_q(x)dx=$$
$$=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,(X(z))^{-1}\left(f_n^{(1)}(z),f_n^{(2)}(z)\right)^T U_q(z)\right).$$

Далее имеем такой результат
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}X^{-1}(\zeta)\Big(f_n^{(1)}(\zeta),f_n^{(2)}(\zeta)\Big)^T T_{q+1}(\zeta)d\zeta=$$
$$=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X^{-1}(z)\left(f_n^{(1)}(z),f_n^{(2)}(z)\right)^T T_{q+1}(z)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(\left(X^+(x)\right)^{-1}-\left(X^+(x)\right)^{-1}\right)\Big(f_n^{(1)}(x),f_n^{(2)}(x)\Big)^T T_{q+1}(x)dx.$$

Снова подсчитаем $\left(X^+\right)^{-1}-\left(X^-\right)^{-1}$ и получим $\left(X^+\right)^{-1}-\left(X^-\right)^{-1}=2\left(X^+\right)^{-1}\,B\,S^{-1}$.

Следовательно,
$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(X^+(t)\right)^{-1}B(t)S^{-1}(t)\Big(f_n^{(1)}(t),f_n^{(2)}(t)\Big)^T T_{q+1}(t)dt=$$
$$=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X^{-1}(z)\Big(f_n^{(1)}(z),f_n^{(2)}(z)\Big)^T T_{q+1}(z)\right).$$

Значит,
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\nu_q^{(1)}\\ \delta_q\nu_q^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\Big(\sqrt{z^2-1}\,\overset{1}{\chi}_1(z)f_n^{(1)}(z)U_q(z)+\sqrt{z^2-1}\,\overset{2}{\chi}_1(z)f_n^{(2)}(z)\,U_q(z)\Big)\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\Big(\sqrt{z^2-1}\,\overset{1}{\chi}_2(z)f_n^{(1)}(z)U_q(z)+\sqrt{z^2-1}\,\overset{2}{\chi}_2(z)f_n^{(2)}(z)\,U_q(z)\Big)\end{pmatrix}-$$
$$-\begin{pmatrix}\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\Big(\overset{1}{\chi}_1(z)f_n^{(1)}(z)T_{q+1}(z)+\overset{2}{\chi}_1(z)f_n^{(2)}(z)\,T_{q+1}(z)\Big)\\ \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\Big(\overset{1}{\chi}_2(z)f_n^{(1)}(z)T_{q+1}(z)+\overset{2}{\chi}_2(z)f_n^{(2)}(z)\,T_{q+1}(z)\Big)\end{pmatrix},$$

или,

$$\frac{1}{2}\nu_q^{(m)} = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{\chi}_m\,(z)\left[\sqrt{z^2-1}\,U_q(z)-T_{q+1}(z)\right]f_n^{(1)}(z)\right)+$$
$$+\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{\chi}_m\,(z)\left[\sqrt{z^2-1}\,U_q(z)-T_{q+1}(z)\right]f_n^{(2)}(z)\right),\qquad m=1,2.$$

С учетом представлений (6.2.27) последние соотношения принимают вид

$$\frac{1}{2}\nu_q^{(m)} = \sum_{j=0}^{n} f_j^{(1)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{\chi}_m\,(z)\left[\sqrt{z^2-1}\,U_q(z)\,U_j(z)-T_{q+1}(z)\,U_j(z)\right]\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{n} f_k^{(2)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{\chi}_m\,(z)\left[\sqrt{z^2-1}\,U_q(z)\,U_k(z)-T_{q+1}(z)\,U_k(z)\right]\right),\tag{6.2.32}$$
$$m=1,2.$$

Используя тождества (2.2.1), а также представление (2.1.11), равенства (6.2.32) запишем в виде

$$\nu_q^{(m)} =$$
$$=\sum_{j=0}^{n} f_j^{(1)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{\overset{1}{\chi}_m\,(z)\left[\left(\frac{T_{j+q+2}(z)}{\sqrt{z^2-1}}-U_{j+q+1}(z)\right)-\left(\frac{T_{j-q}(z)}{\sqrt{z^2-1}}+U_{j-q-1}(z)\right)\right]\right\}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n} f_k^{(2)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{\overset{2}{\chi}_m\,(z)\left[\left(\frac{T_{k+q+2}(z)}{\sqrt{z^2-1}}-U_{k+q+1}(z)\right)-\left(\frac{T_{k-q}(z)}{\sqrt{z^2-1}}+U_{k-q-1}(z)\right)\right]\right\}.$$

Т. е.

$$\nu_q^{(m)} =$$
$$=\sum_{j=0}^{n} f_j^{(1)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{\chi}_m\,(z)R_\infty^{(j+q+2)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)-\sum_{j=0}^{q} f_j^{(1)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{\chi}_m\,(z)R_\infty^{(q-j)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)-$$
$$-\sum_{j=q+1}^{n} f_j^{(1)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{\overset{1}{\chi}_m\,(z)\left[2U_{j-q-1}(z)+R_\infty^{(j-q)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\right\}+$$
$$+\sum_{j=0}^{n} f_j^{(2)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{\chi}_m\,(z)R_\infty^{(j+q+2)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)-\sum_{j=0}^{q} f_j^{(2)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{\chi}_m\,(z)R_\infty^{(q-j)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)-\tag{6.2.33}$$
$$-\sum_{j=q+1}^{n} f_j^{(2)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{\overset{2}{\chi}_m\,(z)\left[2U_{j-q-1}(z)+R_\infty^{(j-q)}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\right\},\qquad m=1,2.$$

Учитывая, что при $N \geqslant 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{j}{\chi}_1\,(z)R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\rho_{\varkappa_1+l}^{(j,1)}}{z^{-\varkappa_1+l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{(N)}}{z^k}\right)=$$
$$=-\sum_{k=1}^{\varkappa_1+1} d_k^{(N)}\,\rho_{1-k+2\varkappa_1}^{(j,1)}=H(N,j),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{j}{\chi}_2\,(z) R_\infty^{(N)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho^{(j,2)}_{|\varkappa_2|+l}}{z^{|\varkappa_2|+l}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^{(N)}}{z^k}\right) = 0,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{j}{\chi}_1\,(z)\, u_n(z)\right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho^{(j,1)}_{\varkappa_1+l}}{z^{-\varkappa_1+l}} \sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]} b_k^{(N)} z^{N-2k}\right) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]} b_k^{(N)} \rho^{(j,1)}_{N+1-2k+2\varkappa_1} = G_3(N,j),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{j}{\chi}_2\,(z)\, u_n(z)\right) = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho^{(j,2)}_{|\varkappa_2|+l}}{z^{|\varkappa_2|+l}} \sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]} b_k^{(N)} z^{N-2k}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & N+1 < |\varkappa_2|, \\ -\sum\limits_{k=0}^{[\frac{N+1-|\varkappa_2|}{2}]} b_k^{(N)} \rho^{(j,2)}_{N+1-2k}, & N+1 \geqslant |\varkappa_2| \end{cases} = G_4(N,j),$$

равенства (6.2.33) принимают вид (6.2.29). □

6.3. Приближенное решение векторного характеристического уравнения

Основываясь на результатах и обозначениях, изложенных в теоремах 6.2.2 – 6.2.5, приступим к построению приближенного решения уравнения (6.1.4).

Схема 6.3.1. Пусть

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \Big(u_n^{(1)}(x), u_n^{(2)}(x)\Big)^T, \\ u_n^{(1)}(x) &= S^{(1)}_{n+\varkappa_1}(x) = \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} U_j(x), \\ u_n^{(2)}(x) &= S^{(2)}_{n-|\varkappa_2|}(x) = \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} U_j(x), \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

где $c_j^{(1)}$, $j = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n+\varkappa_1$, $\quad c_k^{(2)}$, $k = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-|\varkappa_2|$, – неизвестные величины и

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \Big(f_n^{(1)}(x), f_n^{(2)}(x)\Big)^T, \\ f_n^{(1)}(x) &= \sum_{l=0}^{n} f_l^{(1)} U_l(x), \\ f_n^{(2)}(x) &= \sum_{l=0}^{n} f_l^{(2)} U_l(x), \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

где $f_l^{(p)}$, $l = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n$, $\quad p = 1,\ 2,$ – известные величины (см. (2.3.3)):

$$f_l^{(p)} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \Big[T_l(t_k) - \sigma_l T_{l+2}(t_k)\Big] f_p(t_k),$$

$$\sigma_l = \begin{cases} 1, & l = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n-2, \\ 0, & l = n-1,\ n, \end{cases} \qquad t_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n+1.$$

Приближенное решение задачи (6.1.4), (6.1.9) ($\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 < 0$) найдем как решение следующей задачи:

$$K^0(u_n(x);\, x) = f_n(x) + Q(x), \quad -1 < x < 1, \tag{6.3.3}$$

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \Big[g_{11}(t)\, u_n^{(1)}(t) + g_{12}(t)\, u_n^{(2)}(t)\Big]\, t^{k-1} dt = \alpha_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \varkappa_1, \tag{6.3.4}$$

где

$$Q(x) = \Big(0, q_{|\varkappa_2|-1}(x)\Big)^T, \quad q_{|\varkappa_2|-1}(x) = \sum_{l=0}^{|\varkappa_2|-1} q_l U_l(x). \tag{6.3.5}$$

Коэффициенты $q_0,\ q_1,\ \dots\ ,\ q_{|\varkappa_2|-1}$ определяются из равенств (условий разрешимости)

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} h_2(t)\,t^{j-1}dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ |\varkappa_2|,$$

где $h_2(t)$ – вторая компонента вектора

$$h(t)=\big(X^+(t)\big)^{-1}B(t)S^{-1}(t)\Big[f_n(t)+Q(t)\Big]=\Big(h_1(t),h_2(t)\Big)^T.$$

Чтобы вычислить коэффициенты $q_0,\ q_1,\ \dots\ ,\ q_{|\varkappa_2|-1}$ в явном виде, применим формулу [59]

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t^{j-1}\end{pmatrix}\big(X^+(t)\big)^{-1}B(t)S^{-1}(t)\psi_n(t)dt=\\ =\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z^{j-1}\end{pmatrix}\big(X(z)\big)^{-1}\psi_n(z)\right],\\ \psi_n(t)=f_n(t)+Q(t),\qquad j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ |\varkappa_2|,\end{gathered}\tag{6.3.6}$$

и представления (6.3.2), (6.3.5), (6.1.3), (2.1.8). Подсчитывая вычеты в явном виде, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{|\varkappa_2|-1} q_l G_5(j,l,2)=-\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(1)}G_5(j,l,1)-\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(2)}G_5(j,l,2),$$
$$j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ |\varkappa_2|,$$
$$G_5(j,l,v)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{l+j-|\varkappa_2|}{2}\right]} b_k^{(l)}\rho_{j+l-2k}^{(v,2)},\quad v=1,\ 2,$$

из которой обратным ходом метода Гаусса, полагая последовательно $j=1,\ 2,\ \dots\ ,$ $|\varkappa_2|$, и вычисляются коэффициенты $q_{|\varkappa_2|-1},\ \dots\ ,\ q_0$

$$\begin{gathered}q_{|\varkappa_2|-1}=-\frac{1}{b_0^{(|\varkappa_2|-1)}\rho_{|\varkappa_2|}^{(2,2)}}\left[\sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} f_l^{(1)}G_5(j,l,1)+\sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} f_l^{(2)}G_5(j,l,2)\right],\\ q_{|\varkappa_2|-j}=-\frac{1}{b_0^{(|\varkappa_2|-j)}\rho_{|\varkappa_2|}^{(2,2)}}\times\\ \times\left[\sum_{l=|\varkappa_2|+1-j}^{|\varkappa_2|-1} q_l G_5(j,l,2)+\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(1)}G_5(j,l,1)+\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(2)}G_5(j,l,2)\right],\\ j=2,\ \dots\ ,\ |\varkappa_2|.\end{gathered}\tag{6.3.7}$$

Теперь, используя (6.2.16), имеем из (6.3.3)

$$K^0(u_n(x);\,x) = \begin{pmatrix} \mu_0^{(1)}U_0(x) + \dots + \mu_n^{(1)}U_n(x) \\ \\ \mu_0^{(2)}U_0(x) + \dots + \mu_n^{(2)}U_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x) \\ \\ f_n^{(2)}(x) + q_{|\varkappa_2|-1}(x) \end{pmatrix}. \tag{6.3.8}$$

Последовательно приравнивая коэффициенты при $U_n(x),\ \dots\ ,\ U_0(x)$ в тождествах (6.3.8), получим

$$\begin{aligned} &\mu_r^{(1)} = f_r^{(1)}, && r = 0,\ 1,\ \dots, n, \\ &\mu_r^{(2)} = f_r^{(2)}, && r = |\varkappa_2|, |\varkappa_2|+1, \dots, n, \\ &\mu_r^{(2)} = f_r^{(2)} + q_r, && r = 0,\ 1,\ \dots, |\varkappa_2| - 1. \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Привлекая (6.2.17), на основании (6.3.9) будем иметь линейную систему относительно неизвестных $c_j^{(1)}$, $j = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n+\varkappa_1$, $c_k^{(2)}$, $k = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n - |\varkappa_2|$, состоящую из $2n+2$ уравнений.

Из (6.3.4) получим следующие $\varkappa_1$ уравнений вида

$$-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} U_j(z) \overset{1}{X}_1(z)\, z^{l-1} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} U_j(z) \overset{2}{X}_1(z)\, z^{l-1}\right) = \alpha_l,$$
$$l = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa_1.$$

Подсчитаем эти вычеты на основании представлений (6.1.2), (2.1.8) и получим

$$\begin{gathered} \sum_{j=\varkappa_1-l}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Q_5(l,j) + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Q_6(l,j) = \alpha_l, \quad l = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa_1, \\ Q_5(l,j) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{j+l-\varkappa_1}{2}\right]} b_k^{(j)} p_{j+l-2k}^{(1,1)}, \quad Q_6(l,j) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} b_k^{(j)} p_{j+l+2|\varkappa_2|-2k}^{(2,1)}. \end{gathered} \tag{6.3.10}$$

Значит, задача (6.3.3), (6.3.4) приводит к такой системе линейных алгебраических уравнений, состоящей из $2n+2+\varkappa_1$ уравнений, относительно $2n+2+\varkappa_1-|\varkappa_2|$ неизвестных:

$$\begin{gathered} \sum_{j=r}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} y_{r,j}^{(1,1)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} y_{r,j}^{(1,2)} = f_r^{(1)}, \quad r = 0,\ 1,\ \dots, n, \\ \sum_{j=r}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} y_{r,j}^{(2,1)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} y_{r,j}^{(2,2)} = f_r^{(2)} + \delta_r q_r, \\ \delta_r = \begin{cases} 0, & r \geqslant |\varkappa_2|, \\ 1, & r < |\varkappa_2|, \end{cases} \qquad r = 0,\ 1,\ \dots, n, \end{gathered} \tag{6.3.11}$$

$$y_{r,j}^{(i,1)} = \begin{cases} -M_1(0,i), & j = r, \\ 0, & j < r, \quad i = 1,\ 2, \\ -2Q_3(j-r-1,i), & j > r, \end{cases}$$

$$y_{r,j}^{(i,2)} = M_2(r+j+2,i) - \begin{cases} M_2(r-j,i), & j \leqslant \min(r, n-|\varkappa_2|), \\ 2Q_4(j-r-1,i) + M_2(j-r,i), & j > r, \end{cases}$$

$$c_{\varkappa_1 - l}^{(1)} = \frac{1}{b_0^{(\varkappa_1 - l)} p_{\varkappa_1}^{(1,1)}} \left(\alpha_l - \sum_{j=\varkappa_1 - l+1}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Q_5(l,j) - \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Q_6(l,j) \right), \ l = 1,\ 2,\ \dots,\ \varkappa_1.$$

Система (6.3.11) разрешима, поскольку она равносильна системе, полученной из (6.3.3) в результате применения формулы (6.1.6), т. е.

$$u_n(x) = \left(X^+(x)\right)^{-1} A(x) S^{-1}(x) \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x) \\ f_n^{(2)}(x) + q_{|\varkappa_2|-1}(x) \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \left(X^+(t)\right)^{-1} B(t) S^{-1}(t) \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(t) \\ f_n^{(2)}(t) + q_{|\varkappa_2|-1}(t) \end{pmatrix} \frac{dt}{t-x} + \begin{pmatrix} p_{\varkappa_1 - 1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.12)$$

Коэффициенты многочлена $p_{\varkappa_1-1}(x)$ определяются согласно алгоритму (6.1.14). Далее, многочлен $p_{\varkappa_1-1}(x)$ разложим по многочленам $U_j(x)$, $j = 0,\ 1,\ \dots,\ \varkappa_1 - 1$, используя представления [30]:

$$x^m = 2^{-m} \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{m+1-2i}{m+1-i} \binom{m}{i} U_{m-2i}(x), \qquad \binom{m}{i} = \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!},$$

и получим:

$$p_{\varkappa_1-1}(x) = \gamma_0^* U_0(x) + \gamma_1^* U_1(x) + \dots + \gamma_{\varkappa_1-1}^* U_{\varkappa_1-1}(x).$$

И, используя разложение обратного оператора по многочленам Чебышева второго рода (6.2.21), подобно предыдущему, в развернутой форме система (6.3.12) примет вид:

$$c_q^{(1)} = \sum_{j=0}^{n} f_j^{(1)} H(q+j+2,1) - \sum_{j=q+1}^{n} f_j^{(1)} \Big[2\,G_3(j-q-1,1) + H(j-q,1) \Big] -$$

$$- \sum_{j=0}^{\min(q,n)} f_j^{(1)} H(q-j,1) + \sum_{j=0}^{n} f_j^{(2)} H(q+j+2,2) -$$

$$- \sum_{j=q+1}^{n} f_j^{(2)} \Big[2\,G_3(j-q-1,2) + H(j-q,2) \Big] - \sum_{j=0}^{\min(q,n)} f_j^{(2)} H(q-j,2) + \gamma_q^* \delta_q,$$

$$\delta_q = \begin{cases} 0, & q \geqslant \varkappa_1, \\ 1 & q < \varkappa_1, \end{cases} \quad q = 0,\ 1,\ \dots,\ n + \varkappa_1,$$

$$c_r^{(2)} = -2 \sum_{j=r+1}^{n} f_j^{(1)} G_4(j-r-1,1) - 2 \sum_{j=r+1}^{n} f_j^{(2)} G_4(j-r-1,2),\ r = 0,\ \dots,\ n - |\varkappa_2|.$$

Схема 6.3.2. Пусть

$$
\begin{aligned}
&u_n(x) = \left(u_n^{(1)}(x), u_n^{(2)}(x)\right)^T, \\
&u_n^{(1)}(x) = S_{n+\varkappa_1}^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} T_j(x), \\
&u_n^{(2)}(x) = S_{n-|\varkappa_2|}^{(2)}(x) = \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} T_j(x),
\end{aligned}
\tag{6.3.13}
$$

где $c_j^{(1)}$, $j = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n + \varkappa_1$, $\quad c_k^{(2)}$, $k = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n - |\varkappa_2|$, – неизвестные величины и имеет место (6.3.2).

Приближенное решение задачи (6.1.4), (6.1.9) ($\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 < 0$) по другому алгоритму найдем как решение следующей задачи:

$$
K^0(u_n(x);\, x) = f_n(x) + Q(x), \quad -1 < x < 1, \tag{6.3.14}
$$

$$
\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \left[g_{11}(t)\, u_n^{(1)}(t) + g_{12}(t)\, u_n^{(2)}(t)\right] t^{k-1} dt = \alpha_k, \quad k = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa_1, \tag{6.3.15}
$$

где $Q(x)$ имеет вид (6.3.5), коэффициенты $q_0,\ q_1,\ \dots\ ,\ q_{|\varkappa_2|-1}$ которого вычисляются согласно (6.3.7).

Теперь, используя (6.2.11), из (6.3.14) имеем

$$
K^0(u_n(x);\, x) = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(1)} U_0(x) + \dots + \alpha_n^{(1)} U_n(x) \\ \\ \alpha_0^{(2)} U_0(x) + \dots + \alpha_n^{(2)} U_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x) \\ \\ f_n^{(2)}(x) + q_{|\varkappa_2|-1}(x) \end{pmatrix}. \tag{6.3.16}
$$

Последовательно приравнивая коэффициенты при $U_n(x),\ \dots\ ,\ U_0(x)$ в тождествах (6.3.16), получим

$$
\begin{aligned}
&\alpha_r^{(1)} = f_r^{(1)}, && r = 0,\ 1,\ \cdots, n, \\
&\alpha_r^{(2)} = f_r^{(2)}, && r = |\varkappa_2|, |\varkappa_2| + 1, \cdots, n, \\
&\alpha_r^{(2)} = f_r^{(2)} + q_r, && r = 0,\ 1,\ \cdots, |\varkappa_2| - 1.
\end{aligned}
\tag{6.3.17}
$$

Привлекая (6.2.12), на основании (6.3.17) будем иметь линейную систему относительно неизвестных $c_j^{(1)}$, $j = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n + \varkappa_1$, $c_k^{(2)}$, $k = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n - |\varkappa_2|$, состоящую из $2n + 2$ уравнений.

Из (6.3.15) получим следующие $\varkappa_1$ уравнений вида

$$
-\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} T_j(z) \overset{1}{X}_1(z)\, z^{l-1} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} T_j(z) \overset{2}{X}_1(z)\, z^{l-1} \right) = \alpha_l,
$$
$$
l = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa_1.
$$

Подсчитаем эти вычеты на основании представлений (6.1.2), (2.1.7) и получим

$$
\begin{gathered}
\sum_{j=\varkappa_1-l}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Q_7(l,j) + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Q_8(l,j) = \alpha_l, \\
l = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa_1, \\
Q_7(l,j) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{j+l-\varkappa_1}{2}\right]} a_k^{(j)} p_{j+l-2k}^{(1,1)}, \\
Q_8(l,j) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} a_k^{(j)} p_{j+l+2|\varkappa_2|-2k}^{(2,1)}.
\end{gathered}
\tag{6.3.18}
$$

Значит, задача (6.3.14), (6.3.15) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений, состоящей из $2n+2+\varkappa_1$ уравнений, относительно $2n+2+\varkappa_1-|\varkappa_2|$ неизвестных:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=r}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} y_{r,j}^{(1,1)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} y_{r,j}^{(1,2)} = f_r^{(1)}, \\
&\qquad r = 0,\ 1,\ \dots, n, \\
&\sum_{j=r}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} y_{r,j}^{(2,1)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} y_{r,j}^{(2,2)} = f_r^{(2)} + \vartheta_r q_r, \\
&\qquad \vartheta_r = \begin{cases} 0, & r \geqslant |\varkappa_2|, \\ 1, & r < |\varkappa_2|, \end{cases} \\
&\qquad\qquad r = 0,\ 1,\ \dots, n, \\
&\qquad y_{r,j}^{(i,1)} = \begin{cases} -Q_1(0,i), & j = r+1, \\ 0, & j < r+1, \qquad i = 1,\ 2, \\ -2Q_1(j-r-1,i), & j > r+1, \end{cases} \\
&\qquad y_{r,j}^{(i,2)} = V(r+j+1,i) - \\
&\qquad - \begin{cases} Q_2(0,i), & j = r+1, \\ -V(r-j+1,i), & j \leqslant \min(r, n-|\varkappa_2|), \\ 2Q_2(j-r-1,i) + V(j-r-1,i), & j > r+1, \end{cases} \\
&c_{\varkappa_1-l}^{(1)} = \frac{1}{a_0^{(\varkappa_1-l)} p_{\varkappa_1}^{(1,1)}} \left(\alpha_l - \sum_{j=\varkappa_1-l+1}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Q_7(l,j) - \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Q_8(l,j) \right), \\
&\qquad\qquad l = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa_1.
\end{aligned}
\tag{6.3.19}
$$

Система (6.3.19) разрешима, поскольку она равносильна системе, полученной из (6.3.14) в результате применения формулы (6.1.6), т. е.

$$u_n(x) = \left(X^+(x)\right)^{-1} A(x)S^{-1}(x) \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(x) \\ f_n^{(2)}(x) + q_{|\varkappa_2|-1}(x) \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \left(X^+(t)\right)^{-1} B(t)S^{-1}(t) \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(t) \\ f_n^{(2)}(t) + q_{|\varkappa_2|-1}(t) \end{pmatrix} \frac{dt}{t-x} + \begin{pmatrix} p_{\varkappa_1-1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.20)$$

Коэффициенты многочлена $p_{\varkappa_1-1}(x)$ определяются согласно алгоритму (6.1.14). Далее, многочлен $p_{\varkappa_1-1}(x)$ разложим по многочленам $T_j(x)$, $j = 0,\ 1,\ \dots\ ,$ $\varkappa_1 - 1$, используя представления [30]:

$$x^m = 2^{-m+1} \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \binom{m}{i} T_{m-2i}(x), \qquad \binom{m}{i} = \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!},$$

и получим: $p_{\varkappa_1-1}(x) = \gamma_0^* T_0(x) + \gamma_1^* t_1(x) + \dots + \gamma_{\varkappa_1-1}^* T_{\varkappa_1-1}(x)$.

И, используя разложение обратного оператора по многочленам Чебышева первого рода (6.2.21), подобно предыдущему, в развернутой форме система (6.3.20) примет вид:

$$c_q^{(1)} =$$

$$= -\sum_{r=1}^{2} \left[\sum_{j=0}^{n} f_j^{(r)} \Big(2G_1(j+q+1, r) + H(q+j+1, r) \Big) + \sum_{j=q}^{n} f_j^{(r)} H(j-q+1, r) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{\min(q-2,n)} f_j^{(r)} \Big(2\, G_1(q-j-1, r) + H(q-j-1, r) \Big) - f_{q-1}^{(r)} G_1(0, r) \right] + \gamma_q^* \vartheta_q,$$

$$\vartheta_q = \begin{cases} 0, & q \geqslant \varkappa_1, \\ 1 & q < \varkappa_1, \end{cases} \qquad q = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n + \varkappa_1,$$

$$c_w^{(2)} =$$

$$= -2 \sum_{r=1}^{2} \Big[\sum_{j=0}^{n} f_j^{(r)} G_2(j+w+1, r) - \sum_{j=0}^{w-2} f_j^{(r)} G_2(w-j-1, r) \Big],$$

$$w = 0,\ \dots\ ,\ n - |\varkappa_2|.$$

6.4. Приближенное решение векторного полного СИУ

Основываясь на предыдущих обозначениях, изложенных в теоремах 6.2.1 – 6.2.5, а также на схемах 6.3.1, 6.3.2, приступим к построению приближенного решения полного векторного уравнения.

Схема 6.4.1. Приближенное решение задачи (6.1.4), (6.1.9) ($\varkappa_1 \geqslant 0,\ \varkappa_2 < 0$) определим как решение задачи

$$K^0(u_n(x);\, x) + K^*(u_n(x);\, x) = f_n(x) + Q^*(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6.4.1}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\Big[g_{11}(t)\, u_n^{(1)}(t) + g_{12}(t)\, u_n^{(2)}(t)\Big]\, t^{k-1}dt = \alpha_k, \quad k = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \varkappa_1, \tag{6.4.2}$$

где

$$K^*(u_n(x);\, x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} K^*_{n,n}(x,\, t)B(t)D^{-1}(t)X^+(t)\, u_n(t)dt, \tag{6.4.3}$$

$$K^*_{n,n}(x,\, t) = \Big(k^{(p,q)}_{n,n}(x,\, t)\Big)^2_{p,q=1},$$

$$k^{(p,q)}_{n,n}(x,\, t) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{r=0}^{n}\alpha^{(p,q)}_{l,r}U_l(x)\, T_r(t),$$

$$\alpha^{(p,q)}_{l,r} = \frac{\delta_r}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n+1}\Big[T_l(t_k) - \sigma_l T_{l+2}(t_k)\Big]\sum_{j=1}^{n+1}T_r(t_j)k^*_{p,q}(t_k,\, t_j),$$

$$\delta_r = \begin{cases}1, & r = 0,\\ 2, & r > 0,\end{cases} \qquad \sigma_l = \begin{cases}1, & l = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n-2,\\ 0, & l = n-1,\ n,\end{cases}$$

$$t_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi, \qquad k = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n+1,$$

$u_n(x),\ f_n(x)$ задаются соответственно (6.3.1), (6.3.2),

$$Q^*(x) = \Big(0, q^*_{|\varkappa_2|-1}(x)\Big)^T, \qquad q^*_{|\varkappa_2|-1}(x) = \sum_{r=0}^{|\varkappa_2|-1} q^*_r U_r(x). \tag{6.4.4}$$

Коэффициенты $q^*_0,\ \dots\ ,\ q^*_{|\varkappa_2|-1}$ находятся из уравнений (см.(6.1.18))

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} h^*_2(t)\, t^{j-1}dt = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ |\varkappa_2|, \tag{6.4.5}$$

где $h^*_2(x)$ – вторая компонента вектора

$$h^*(x) = \big(X^+(x)\big)^{-1}B(x)S^{-1}(x)\Big[f_n(x) - K^*(u_n(x);\, x) + Q(x)\Big] = \Big(h^*_1(x), h^*_2(x)\Big)^T.$$

Сначала упростим $K^*(u_n(x);\,x)$. Подставим (6.3.1) в (6.4.3)

$$K^*(u_n(x);\,x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix} k_{n,n}^{(1,1)}(x,\,t) & k_{n,n}^{(1,2)}(x,\,t) \\ k_{n,n}^{(2,1)}(x,\,t) & k_{n,n}^{(2,2)}(x,\,t)\end{pmatrix} B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\begin{pmatrix} u_n^{(1)}(t) \\ u_n^{(2)}(t)\end{pmatrix} dt =$$

$$= \sum_{l=0}^{n}\sum_{r=0}^{n}\begin{pmatrix} \alpha_{l,r}^{(1,1)} & \alpha_{l,r}^{(1,2)} \\ \alpha_{l,r}^{(2,1)} & \alpha_{l,r}^{(2,2)}\end{pmatrix} U_l(x)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} T_r(t)B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)}U_j(t) \\ \sum\limits_{k=0}^{n-|\varkappa_2|} c_k^{(2)}U_k(t)\end{pmatrix} dt =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} U_l(x)\sum_{r=0}^{n}\begin{pmatrix} \alpha_{l,r}^{(1,1)} & \alpha_{l,r}^{(1,2)} \\ \alpha_{l,r}^{(2,1)} & \alpha_{l,r}^{(2,2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega_{1,r} \\ \Omega_{2,r}\end{pmatrix},$$

где

$$\Omega_{q,r} = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)}\overset{1}{X}_q(z)\,U_j(z)\,T_r(z) + \sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|} c_k^{(2)}\overset{2}{X}_q(z)\,U_k(z)\,T_r(z)\right) =$$

$$= -\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_q(z)\frac{1}{2}\Big[U_{j+r}(z) + U_{j-r}(z)\Big]\right) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|} c_k^{(2)}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_q(z)\frac{1}{2}\Big[U_{k+r}(z) + U_{k-r}(z)\Big]\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)}\left[-\frac{1}{2}Q_3(j+r,q) + \frac{1}{2}\Theta_1(j-r,q)\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|} c_k^{(2)}\left[-\frac{1}{2}Q_4(k+r,q) + \frac{1}{2}\Theta_2(k-r,q)\right],$$

$$\Theta_1(j-r,q) = \begin{cases} -Q_3(j-r,q), & j > r-1, \\ 0, & j = r-1, \\ Q_3(r-j-2,q), & j < r-1,\end{cases}$$

$$\Theta_2(k-r,q) = \begin{cases} -Q_4(k-r,q), & k > r-1, \\ 0, & k = r-1, \\ Q_4(r-k-2,q), & k < r-1,\end{cases}$$

$$q = 1,\ 2$$

и получим

$$K^*(u_n(x);\,x) = \begin{pmatrix} \delta_0^{(1)}U_0(x) + \cdots + \delta_n^{(1)}U_n(x) \\ \\ \delta_0^{(2)}U_0(x) + \cdots + \delta_n^{(2)}U_n(x)\end{pmatrix}, \tag{6.4.6}$$

где

$$\delta_l^{(p)} = \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Y_{l,j}^{(p,1)} + \sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|} c_k^{(2)} Y_{l,k}^{(p,2)},$$

$$Y_{j,1}^{(p,1)} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}\sum_{q=1}^{2} \alpha_{l,r}^{(p,q)} \left[-Q_3(j+r,q) + \Theta_1(j-r,q)\right],$$

$$Y_{l,k}^{(p,2)} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}\sum_{q=1}^{2} \alpha_{l,r}^{(p,q)} \left[-Q_4(k+r,q) + \Theta_2(k-r,q)\right], \; p = 1, 2.$$

Теперь по (6.4.5) на основании (6.4.6) с учетом (6.3.6) при

$$\psi_n(x) = f_n(x) - K^*(u_n(x);\, x) + Q^*(x)$$

подсчитаем коэффициенты $q_0^*, \; \ldots \;, \; q_{|\varkappa_2|-1}^*$ многочлена $q_{|\varkappa_2|-1}^*(x)$ (см. (6.4.4)) и получим

$$\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{|\varkappa_2|-1} q_l^* G_5(j,l,2) = -\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(1)} G_5(j,l,1) - \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(2)} G_5(j,l,2) +$$

$$+ \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} \delta_l^{(1)} G_5(j,l,1) + \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} \delta_l^{(2)} G_5(j,l,2),$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa_2|,$$

$$G_5(j,l,v) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{l+j-|\varkappa_2|}{2}\right]} b_k^{(l)} \rho_{j+l-2k}^{(v,2)}, \quad v = 1,\ 2.$$

Отсюда обратным ходом метода Гаусса, полагая последовательно $j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa_2|$, вычислим коэффициенты $q_{|\varkappa_2|-1}^*,\ \ldots\ ,\ q_0^*$

$$q_{|\varkappa_2|-1}^* = -\frac{1}{b_0^{(|\varkappa_2|-1)} \rho_{|\varkappa_2|}^{(2,2)}} \Bigg[\sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} f_l^{(1)} G_5(j,l,1) + \sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} f_l^{(2)} G_5(j,l,2) -$$

$$- \sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} \delta_l^{(1)} G_5(j,l,1) - \sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} \delta_l^{(2)} G_5(j,l,2)\Bigg],$$

$$q_{|\varkappa_2|-j}^* = -\frac{1}{b_0^{(|\varkappa_2|-j)} \rho_{|\varkappa_2|}^{(2,2)}} \Bigg[\sum_{l=|\varkappa_2|+1-j}^{|\varkappa_2|-1} q_l G_5(j,l,2) + \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(1)} G_5(j,l,1) +$$

$$+ \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(2)} \sum_{k=0}^{\left[\frac{l+j-|\varkappa_2|}{2}\right]} b_k^{(l)} \rho_{j+l-2k}^{(2,2)} - \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} \delta_l^{(1)} G_5(j,l,1) - \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} \delta_l^{(2)} G_5(j,l,2)\Bigg],$$

$$j = 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa_2|.$$

Учитывая результаты теоремы 6.2.3 и (6.4.6), от (6.4.1) придем к такой системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\mu_r^{(1)} + \delta_r^{(1)} = f_r^{(1)}, && r = 0,\ 1,\ \cdots,\ n,\\
&\mu_r^{(2)} + \delta_r^{(2)} = f_r^{(2)}, && r = |\varkappa_2|,\ |\varkappa_2|+1,\ \cdots,\ n,\\
&\mu_r^{(2)} + \delta_r^{(2)} - q_r^* = f_r^{(2)}, && r = 0,\ 1,\ \cdots,\ |\varkappa_2|-1.
\end{aligned} \tag{6.4.7}$$

Далее, из (6.4.7), как и в случае характеристического уравнения (см. (6.3.9), (6.3.11)), учитывая, что (6.4.2) эквивалентна (6.3.10), окончательно получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=r}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} y_{r,j}^{(1,1)} + \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Y_{r,j}^{(1,1)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} y_{r,j}^{(1,2)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Y_{r,j}^{(1,2)} = f_r^{(1)},$$

$$r = 0,\ 1,\ \cdots, n,$$

$$\sum_{j=r}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} y_{r,j}^{(2,1)} + \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Y_{r,j}^{(2,1)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Y_{r,j}^{(2,2)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} y_{r,j}^{(2,2)} - \delta_r q_r^* = f_r^{(2)},$$

$$\delta_r = \begin{cases} 0, & r \geqslant |\varkappa_2|, \\ 1, & r < |\varkappa_2|, \end{cases} \quad r = 0,\ 1,\ \cdots, n,$$

$$\sum_{j=\varkappa_1-l}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Q_5(l,j) + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Q_6(l,j) = \alpha_l,$$

$$l = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa_1.$$

Схема 6.4.2. Приближенное решение задачи (6.1.4), (6.1.9) ($\varkappa_1 \geqslant 0,\ \varkappa_2 < 0$) определим как решение задачи

$$K^0(u_n(x);\, x) + K^*(u_n(x);\, x) = f_n(x) + Q^*(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6.4.8}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\left[g_{11}(t)\, u_n^{(1)}(t) + g_{12}(t)\, u_n^{(2)}(t)\right] t^{k-1}dt = e_k, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa_1, \tag{6.4.9}$$

где

$$K^*(u_n(x);\, x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} K_{n,n}^*(x,\, t) B(t) D^{-1}(t) X^+(t)\, u_n(t) dt, \tag{6.4.10}$$

$u_n(x),\ f_n(x),\ Q^*(x)$ задаются соответственно (6.3.13), (6.3.2),(6.4.4),(6.4.5).

Сначала упростим $K^*(u_n(x);\,x)$. Подставим (6.3.13) в (6.4.10)

$$K^*(u_n(x);\,x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\begin{pmatrix}k_{n,n}^{(1,1)}(x,\,t) & k_{n,n}^{(1,2)}(x,\,t)\\ k_{n,n}^{(2,1)}(x,\,t) & k_{n,n}^{(2,2)}(x,\,t)\end{pmatrix}B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\begin{pmatrix}u_n^{(1)}(t)\\ u_n^{(2)}(t)\end{pmatrix}dt=$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\sum_{r=0}^{n}\begin{pmatrix}\alpha_{l,r}^{(1,1)} & \alpha_{l,r}^{(1,2)}\\ \alpha_{l,r}^{(2,1)} & \alpha_{l,r}^{(2,2)}\end{pmatrix}U_l(x)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}T_r(t)B(t)D^{-1}(t)X^{+}(t)\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=0}^{n+\varkappa_1}c_j^{(1)}T_j(t)\\ \sum\limits_{k=0}^{n-|\varkappa_2|}c_k^{(2)}T_k(t)\end{pmatrix}dt=$$

$$=\sum_{l=0}^{n}U_l(x)\sum_{r=0}^{n}\begin{pmatrix}\alpha_{l,r}^{(1,1)} & \alpha_{l,r}^{(1,2)}\\ \alpha_{l,r}^{(2,1)} & \alpha_{l,r}^{(2,2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega_{1,r}\\ \Omega_{2,r}\end{pmatrix},$$

где

$$\Omega_{q,r}=-\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1}c_j^{(1)}\overset{1}{X}_q(z)\,T_j(z)\,T_r(z)+\sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|}c_k^{(2)}\overset{2}{X}_q(z)\,T_k(z)\,T_r(z)\right)=$$

$$=-\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1}\frac{c_j^{(1)}}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{1}{X}_q(z)\Big[T_{j+r}+T_{j-r}\Big]\right)-\sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|}\frac{c_k^{(2)}}{2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\overset{2}{X}_q(z)\Big[T_{k+r}+T_{k-r}\Big]\right)=$$

$$=-\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1}\frac{c_j^{(1)}}{2}\Big(Q_1(j+r,q)+Q_1(|j-r|,q)\Big)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|}\frac{c_k^{(2)}}{2}\Big(Q_2(k+r,q)+Q_2(|k-r|,q)\Big),\qquad q=1,\ 2,$$

и получим

$$K^*(u_n(x);\,x)=\begin{pmatrix}\delta_0^{(1)}U_0(x)+\cdots+\delta_n^{(1)}U_n(x)\\ \\ \delta_0^{(2)}U_0(x)+\cdots+\delta_n^{(2)}U_n(x)\end{pmatrix},\tag{6.4.11}$$

где

$$\delta_l^{(p)}=\sum_{j=0}^{n+\varkappa_1}c_j^{(1)}Y_{l,j}^{(p,1)}+\sum_{k=0}^{n-|\varkappa_2|}c_k^{(2)}Y_{l,k}^{(p,2)},$$

$$Y_{j,1}^{(p,1)}=-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}\sum_{q=1}^{2}\alpha_{l,r}^{(p,q)}\Big[Q_1(j+r,q)+Q_1(|j-r|,q)\Big],$$

$$Y_{l,k}^{(p,2)}=-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}\sum_{q=1}^{2}\alpha_{l,r}^{(p,q)}\Big[Q_2(k+r,q)+Q_2(|k-r|,q)\Big],\quad p=1,\ 2.$$

Теперь по (6.4.5) на основании (6.4.11) с учетом (6.3.6) при

$$\psi_n(x)=f_n(x)-K^*(u_n(x);\,x)+Q^*(x)$$

подсчитаем коэффициенты $q_0^*,\ \ldots\ ,\ q_{|\varkappa_2|-1}^*$ многочлена $q_{|\varkappa_2|-1}^*(x)$ и получим

$$\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{|\varkappa_2|-1} q_l^* G_5(j,l,2) = -\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(1)} G_5(j,l,1) - \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(2)} G_5(j,l,2) +$$
$$+\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} \delta_l^{(1)} G_5(j,l,1) + \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} \delta_l^{(2)} G_5(j,l,2),$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa_2|.$$

Отсюда обратным ходом метода Гаусса, полагая $j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa_2|$, вычислим коэффициенты $q_{|\varkappa_2|-1}^*,\ \ldots\ ,\ q_0^*$

$$q_{|\varkappa_2|-1}^* = -\frac{1}{b_0^{(|\varkappa_2|-1)}\rho_{|\varkappa_2|}^{(2,2)}}\Big[\sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} f_l^{(1)} G_5(j,l,1) + \sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} f_l^{(2)} G_5(j,l,2) -$$
$$-\sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} \delta_l^{(1)} G_5(j,l,1) - \sum_{l=|\varkappa_2|-1}^{n} \delta_l^{(2)} G_5(j,l,2)\Big],$$

$$q_{|\varkappa_2|-j}^* = -\frac{1}{b_0^{(|\varkappa_2|-j)}\rho_{|\varkappa_2|}^{(2,2)}}\Big[\sum_{l=|\varkappa_2|+1-j}^{|\varkappa_2|-1} q_l G_5(j,l,2) + \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(1)} G_5(j,l,1) +$$
$$+\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} f_l^{(2)} \sum_{k=0}^{\left[\frac{l+j-|\varkappa_2|}{2}\right]} b_k^{(l)} \rho_{j+l-2k}^{(2,2)} -$$
$$-\sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} \delta_l^{(1)} G_5(j,l,1) - \sum_{l=|\varkappa_2|-j}^{n} \delta_l^{(2)} G_5(j,l,2)\Big],$$
$$j = 2,\ \ldots\ ,\ |\varkappa_2|.$$

Учитывая результаты теоремы 6.2.2 и (6.4.11), от (6.4.8) придем к такой системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\alpha_r^{(1)} + \delta_r^{(1)} = f_r^{(1)}, && r = 0,\ 1,\ \cdots, n,\\
&\alpha_r^{(2)} + \delta_r^{(2)} = f_r^{(2)}, && r = |\varkappa_2|, |\varkappa_2|+1, \cdots, n,\\
&\alpha_r^{(2)} + \delta_r^{(2)} - q_r^* = f_r^{(2)}, && r = 0,\ 1,\ \cdots, |\varkappa_2|-1.
\end{aligned} \tag{6.4.12}$$

Далее, из (6.4.12), как и в случае характеристического уравнения (см. (6.3.17), (6.3.19)), учитывая, что (6.4.9) эквивалентна (6.3.18), окончательно получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=r}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} y_{r,j}^{(1,1)} + \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Y_{r,j}^{(1,1)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} y_{r,j}^{(1,2)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Y_{r,j}^{(1,2)} = f_r^{(1)},$$

$$r = 0,\ 1,\ \cdots, n,$$

$$\sum_{j=r}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} y_{r,j}^{(2,1)} + \sum_{j=0}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Y_{r,j}^{(2,1)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Y_{r,j}^{(2,2)} + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} y_{r,j}^{(2,2)} - \vartheta_r q_r^* = f_r^{(2)},$$

$$\vartheta_r = \begin{cases} 0, & r \geqslant |\varkappa_2|, \\ 1, & r < |\varkappa_2|, \end{cases} \quad r = 0,\ 1,\ \cdots, n,$$

$$\sum_{j=\varkappa_1-l}^{n+\varkappa_1} c_j^{(1)} Q_7(l,j) + \sum_{j=0}^{n-|\varkappa_2|} c_j^{(2)} Q_8(l,j) = \alpha_l,$$

$$l = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa_1.$$

Глава 7

Численное решение модельных уравнений

Проиллюстрируем эффективность рассмотренных вычислительных алгоритмов на примерах численного решения некоторых модельных сингулярных интегральных уравнений.

7.1. Характеристическое уравнение с произвольными коэффициентами

7.1.1. Класс неограниченных функций

Рассмотрим уравнение (1.1.4)

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} b(t)\varphi(t)\frac{dt}{t-x} = f(x),\ -1 < x < 1,$$

в котором

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{x}{x+2}\frac{1+E(x)}{1-E(x)}, \\ E(x) &= \exp\left[2\pi i\left(\frac{5}{4} - i\right)x\right], \\ b(x) &= \frac{x}{x+2}, \\ f(x) &= \frac{1}{2-x}. \end{aligned}$$

Пусть решение данного уравнения принадлежит классу $h(0)$.

Канонической функцией $X(z)$ класса $h(0)$ задачи линейного сопряжения (1.1.6) является функция

$$\begin{aligned} X(z) &= \left(z^2 - 1\right)^{-2} e^{\Gamma(z)}, \\ \Gamma(z) &= \left(\frac{5}{4} - i\right)\left(2 + z\ln\frac{z-1}{z+1}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\varkappa = 4$.

Чтобы получить задачу вида (2.3.1), (2.1.3), необходимо задать условия единственности: α_j, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Пусть

$$\alpha_j = 2^{j-1},\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Точным решением рассматриваемой задачи

$$A(x)Z(x)\,u(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x} = \frac{1}{2-x},\ -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,u(t)\,t^{j-1}dt = 2^{j-1}, \qquad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

является функция

$$u(x) = -\frac{1}{X(2)}\frac{1}{x-2}. \tag{7.1.1}$$

Имеет место разложение точного решения (7.1.1) по многочленам Чебышева первого рода [30]

$$u(x) = -\frac{1}{X(2)}\frac{1}{x-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* T_k(x),$$

где коэффициенты c_k^* вычисляются по формулам:

$$c_0^* = \frac{1}{X\,(2)\,\sqrt{3}},\ c_k^* = \frac{2}{X\,(2)\,\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)^k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

В табл. 1 даны отклонения между векторами коэффициентов точных решений и приближенных, полученных из системы (2.3.12), (2.3.13):

$$e_n = \max\left\{|c_k - c_k^*| : 0 \leqslant k \leqslant n+4\right\}.$$

Таблица 1

n	5	10	15	20	25	30	35
e_n	1,2 e–4	1,7 e–7	2,3 e–10	3,3 e–13	2,7 e–14	2,0 e–14	1,7 e–14

Анализ изменения e_n показывает, что ошибка отклонения быстро уменьшается и достигает величины, сопоставимой с погрешностью представления вещественных чисел в компьютере, уже при $n = 30$.

7.1.2. Класс ограниченных функций

Рассмотрим уравнение

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} b(t)\varphi(t)\frac{dt}{t-x} = f(x),\ -1 < x < 1, \tag{7.1.2}$$

в котором

$$
\begin{aligned}
a(x) &= \frac{x}{x+2}\frac{1+E(x)}{1-E(x)},\\
E(x) &= \exp\left[2\pi i\left(-\frac{3}{4}+i\right)x\right],\\
b(x) &= \frac{x}{x+2},\\
f(x) &= \frac{1}{2-x}.
\end{aligned}
$$

Пусть решение этого уравнения принадлежит классу $h(-1,\ 1)$.

Канонической функцией $X(z)$ класса $h(-1,\ 1)$ задачи линейного сопряжения (1.1.6) является функция

$$
X(z) = \left(z^2-1\right)e^{\Gamma(z)},
$$

$$
\Gamma(z) = \left(-\frac{3}{4}+i\right)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right).
$$

Отсюда следует, что $\varkappa = -2$.

Условия разрешимости для правой части $f(x)$ уравнения (7.1.2) соблюдены и решением уравнения

$$
A(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)\varphi(t)\frac{dt}{t-x} = f(x),\ -1 < x < 1,
$$

является функция

$$
u(x) = \frac{1}{x-2}. \tag{7.1.3}
$$

Имеет место разложение точного решения (7.1.3) по многочленам Чебышева второго рода [30]

$$
u(x) = \frac{1}{x-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* U_k(x),
$$

где коэффициенты c_k^* вычисляются по формулам

$$
c_k^* = -2\left(2-\sqrt{3}\right)^k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots .
$$

В табл. 2 приведены отклонения между векторами коэффициентов точных решений и приближенных, полученных из системы (2.3.25):

$$
e_n = \max\left\{|c_k - c_k^*| : 0 \leqslant k \leqslant n-2\right\}.
$$

Таблица 2

n	8	10	15	20	25	30
e_n	2,1 e–4	1,5 e–5	2,1 e–8	3,0 e–11	8,1 e–14	4,1 e–14

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании системы (2.3.29).

7.2. Полное сингулярное интегральное уравнение с произвольными коэффициентами

7.2.1. Класс неограниченных функций

Рассмотрим уравнение (1.1.4)

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} b(t)\varphi(t)\frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} k(x,\,t)\varphi(t)dt = f(x),\ -1 < x < 1, \qquad (7.2.1)$$

в котором

$$a(x) = \frac{x}{x+2}\frac{1+E(x)}{1-E(x)},$$
$$E(x) = \exp\left[2\pi i\left(\frac{5}{4} - i\right)x\right],$$
$$b(x) = \frac{x}{x+2},$$
$$k(x,\,t) = \frac{1}{(x+2)(t+2)},$$
$$f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{X(2)-X(0)}{2\,x(2)(x+2)},$$
$$X(2) = \frac{1}{9}\exp\left[\left(\frac{5}{2} - 2i\right)(1-\ln 3)\right],$$
$$X(0) = \exp\left[\frac{5}{2} - 2i\right].$$

Пусть $\varphi(x)$ – решение уравнения (7.2.1), принадлежащее классу $h(0)$. Решением задачи

$$A(x)Z(x)\,u(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,u(t)\frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{Z(t)k(x,\,t)}{a^2(t)-b^2(t)}u(t)dt = f(x),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} B(t)Z(t)\,u(t)\,t^{j-1}dt = 2^{j-1}, \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ -1 < x < 1,$$

является функция

$$u(x) = \frac{1}{X(2)}\frac{1}{2-x}. \qquad (7.2.2)$$

Имеет место разложение точного решения (7.2.2) по многочленам Чебышева второго рода [30]

$$u(x) = \frac{1}{X(2)}\frac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* U_k(x),$$

где коэффициенты c_k^* вычисляются по формулам

$$c_k^* = \frac{2}{X(2)}(2-\sqrt{3})^{k+1}, \ k = 0, \ 1, \ \ldots .$$

В табл. 3 приведены отклонения между векторами коэффициентов точных решений и приближенных, полученных из системы (2.4.5).

Таблица 3

n	6	11	16	21	26	31
$\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n+4} \lvert c_k^* - c_k \rvert$	9,5 e–4	6,2 e–6	2,6 e–9	1,5 e–11	1,6 e–13	2,1 e–13

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании системы (2.4.9).

Имеет место еще одно разложение точного решения (7.2.2) по многочленам Чебышева первого рода [30]

$$u(x) = \frac{1}{X(2)}\frac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{**} T_k(x), \tag{7.2.3}$$

где коэффициенты разложения (7.2.3) вычисляются по формулам

$$c_0^{**} = \frac{1}{X(2)\sqrt{3}}, \ c_k^{**} = \frac{2}{X(2)\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^k, \ k = 1, \ 2, \ \ldots .$$

В табл. 4 приведены отклонения между векторами коэффициентов точных решений и приближенных, полученных из системы (2.4.7).

Таблица 4

n	6	11	16	21	26	31
$\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n+4} \lvert c_k^{**} - c_k \rvert$	8,3 e–4	1,4 e–6	7,0 e–10	1,7 e–12	2,5 e–14	1,9 e–14

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании системы (2.4.11).

7.2.2. Класс ограниченных функций

Рассмотрим решение уравнения (7.2.1) в классе $h(-1,1)$ при

$$a(x) = \frac{x}{x+2}\frac{1+E(x)}{1-E(x)},$$
$$E(x) = \exp\left[2\pi i\left(-\frac{3}{4}+i\right)x\right],$$
$$b(x) = \frac{x}{x+2},$$

$$
\begin{aligned}
&k(x,\, t) = \frac{1}{(x+2)(t+2)},\\
&f(x) = x + 2 + \frac{X(2)}{x-2} + \left[2 - \frac{X(2)-X(0)}{2}\right]\frac{1}{x+2},\\
&X(2) = \frac{1}{9}\exp\left[\left(-\frac{3}{2}+2i\right)\left(1-\ln 3\right)\right],\\
&X(0) = -\exp\left[-\frac{3}{2}+2i\right].
\end{aligned}
$$

Решением этого уравнения является функция

$$
u(x) = \frac{1}{x-2}. \tag{7.2.4}
$$

Имеет место разложение точного решения (7.2.4) по многочленам Чебышева второго рода [30]

$$
u(x) = \frac{1}{x-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* U_k(x),
$$

где коэффициенты c_k^* разложения вычисляются по формулам

$$
c_k^* = -2(2-\sqrt{3})^{k+1},\ \ k = 0,\ 1,\ \ldots\ .
$$

В табл. 5 приведены отклонения между векторами коэффициентов точных решений и приближенных, полученных из системы (2.4.13).

Таблица 5

n	7	12	17	22	27
$\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-2} \lvert c_k^* - c_k\rvert$	1,6 e–3	2,2 e–6	3,0 e–9	4,1 e–12	4,6 e–13

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании системы (2.4.19).

Имеет место еще одно разложение точного решения (7.2.4) по многочленам Чебышева второго рода [30]

$$
u(x) = \frac{1}{x-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{**} T_k(x), \tag{7.2.5}
$$

где коэффициенты разложения (7.2.5) вычисляются по формулам

$$
c_0^{**} = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ c_k^{**} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^k,\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots\ .
$$

В табл. 6 приведены отклонения между векторами коэффициентов точных решений и приближенных, полученных из системы (2.4.15).

Таблица 6

n	7	12	17	22	27
$\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-2} \lvert c_k^{**} - c_k\rvert$	7,8 e–4	1,1 e–6	1,5 e–9	2,3 e–12	1,9 e–12

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании системы (2.4.17).

7.3. Сингулярное интегральное уравнение первого рода

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение первого рода (3.5.1):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k(x,\,t)\varphi(t)dt=f(x),\ -1<x<1,$$

где

$$k(x,t)=\frac{x}{x^2+t^2+1},\qquad f(x)=\frac{\sqrt{2}}{1+x^2}-1.$$

Пусть решение уравнения (3.5.1) принадлежит классу $h(-1,\ 1)$. Функция

$$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\,v(x),\ v(x)=\frac{x}{1+x^2},$$

будет решением в заданном классе.

В табл. 7 приведены результаты приближенного решения уравнения (3.5.1) по формуле (3.5.18) (с учетом (3.5.14)) после решения системы (3.5.17) в системе точек x от $-0,995$ до $0,995$ с шагом $0,001$.

Таблица 7

n	20	26	36	40	42
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x)-\varphi_n(x)\rvert$	1,3 e–8	6,5 e–11	1,2 e–14	1,9 e–15	3,0 e–15

Имеет место разложение точного решения по многочленам Чебышева второго рода [30]

$$v(x)=\frac{x}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^*\,U_{2k+1}(x),$$

где коэффициенты c_k^* вычисляются по формулам

$$c_k^*=(6-4\sqrt{2})(2\sqrt{2}-3)^k,\ k=0,\ 1,\ \ldots\ .$$

В табл. 8 приведены отклонения между векторами коэффициентов точных решений и приближенных, полученных из системы (3.5.17).

Таблица 8

n	20	26	36	40	42	44
$\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n+4} \lvert c_k^* - c_k\rvert$	7,7 e–9	3,9 e–11	5,5 e–15	1,5 e–15	1,3 e–15	3,9 e–15

7.4. Сингулярное интегральное уравнение первого рода со специальной правой частью

Рассмотрим уравнение (4.3.2):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x} = \ln\frac{1-x}{1+x}f(x), \quad -1 < x < 1, \tag{7.4.1}$$

где $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

7.4.1. Класс ограниченных функций.

Пусть решение уравнения (7.4.1) принадлежит классу $h(-1,\ 1)$. Условие разрешимости для данной функции $f(x)$ очевидно выполняются и функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}{4}\right)$$

будет решением в заданном классе.

В табл. 9 приведены результаты приближенного решения уравнения (7.4.1) по формуле (4.3.6) в системе точек x от $-0,995$ до $0,995$ с шагом $0,001$.

Таблица 9

n	20	25	30	35	45
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x) - \varphi_n(x)\rvert$	1,7 e–8	1,6 e–10	2,1 e–12	2,5 e–14	7,7 e–15

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании формул (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9). Значения $\max\limits_{|x|<1} |\varphi(x) - \varphi_n(x)|$ при фиксированном n оказались равными для всех четырех вычислительных схем.

7.4.2. Класс неограниченных функций

Рассмотрим решение уравнения (7.4.1) в классе $h(0)$. Добавим к уравнению условие единственности

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt = \alpha_0 \tag{7.4.2}$$

при $\alpha_0 = 0$.

Функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$$

будет решением поставленной задачи.

В табл. 10 приведены результаты численного решения задачи (7.4.1), (7.4.2) по формуле (4.3.15) в системе точек x от $-0,995$ до $0,995$ с шагом $0,001$.

Таблица 10

n	20	25	30	35	40
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x)-\varphi_n(x)\rvert$	1,5 e–8	1,4 e–10	1,5 e–12	2,4 e–14	5,3 e–15

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании формул (4.3.16), (4.3.17), (4.3.18). Значения $\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x)-\varphi_n(x)\rvert$ при фиксированном n оказались равными для всех четырех вычислительных схем.

7.4.3. Класс неограниченных на левом конце функций

Рассмотрим решение уравнения (7.4.1) в классе $h(1)$. В этом случае функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}{4}\right)$$

будет решением.

В табл. 11 приведены результаты численного решения уравнения (4.3.2) в классе $h(1)$ по формуле (4.3.22) в системе точек x от $-0,995$ до $0,995$ с шагом $0,001$.

Таблица 11

n	20	25	30	35
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x)-\varphi_n(x)\rvert$	1,7 e–8	1,5 e–10	1,6 e–12	2,2 e–14

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании формул (4.3.23), (4.3.24), (4.3.25). Значения $\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x)-\varphi_n(x)\rvert$ при фиксированном n оказались равными для всех четырех вычислительных схем.

7.4.4. Класс ограниченных на левом конце функций

Рассмотрим решение уравнения (7.4.1) в классе $h(-1)$. В данном случае та же функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}{4}\right)$$

будет решением.

В табл. 12 приведены результаты численного решения уравнения (7.4.1) в классе $h(1)$ по формуле (4.3.29) системе точек x от $-0,995$ до $0,995$ с шагом $0,001$.

Таблица 12

n	20	25	30	35
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x)-\varphi_n(x)\rvert$	1,7 e–8	1,5 e–10	1,6 e–12	2,2 e–14

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при использовании формул (4.3.30)– (4.3.32) Значения $\max\limits_{|x|<1} |\varphi(x)-\varphi_n(x)|$ при фиксированном n оказались равными для всех четырех вычислительных схем.

7.5. Полное сингулярное интегральное уравнение первого рода со специальной правой частью

Рассмотрим уравнение (4.3.1):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}k(x,\,t)\varphi(t)dt=\ln\frac{1-x}{1+x}f(x)+g(x),\quad -1<x<1. \tag{7.5.1}$$

7.5.1. Класс неограниченных функций

В табл. 13 приведены результаты численного решения задачи (7.5.1), (7.4.2) в классе $h(0)$ по формуле (4.4.24) при

$$k(x,\,t)=\frac{t}{(x+2)(t^2+1)},$$
$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$
$$g(x)=-\frac{x}{\sqrt{2}(1+x^2)},$$
$$\alpha_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

в системе точек x от $-0,995$ до $0,995$ с шагом $0,001$.

Решением в данном случае будет функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Таблица 13

n	10	20	30	40	50
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x)-\varphi_n(x)\rvert$	8,7 e–5	1,3 e–8	2,0 e–12	0,8 e–14	4,4 e–14

7.5.2. Класс ограниченных функций

В табл. 14 приведены результаты численного решения уравнения (7.4.1) в классе $h(-1,\ 1)$ по формуле (4.4.14) при

$$k(x,\,t) = \frac{t}{(x+2)(t^2+1)},$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

$$g(x) = \frac{-\sqrt{2}x}{(1+x^2)}$$

в системе точек x от $-0,995$ до $0,995$ с шагом $0,001$.

Функция

$$\varphi(x) = \frac{1+(1-\sqrt{2}/4)\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$$

в этом случае будет решением.

Таблица 14

n	10	20	30	40	50
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x)-\varphi_n(x)\rvert$	1,8 e–4	1,3 e–8	2,0 e–12	1,4 e–13	6,6 e–13

7.6. СИУ с двукратными ядрами Коши и специальной правой частью

7.6.1. Класс неограниченных функций

Рассмотрим сравнительную эффективность построенных алгоритмов (5.3.11), (5.3.12), (5.3.14), (5.3.15) на следующем примере. Пусть дано уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t,\tau)\frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)} = \ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}\,f(x,y),$$
$$(x,y)\in D^2 = (-1,1)\times(-1,1). \tag{7.6.1}$$

Решение уравнения (7.6.1) будем искать в классе $h(0) \times h(0)$. Присоединим к уравнению (7.6.1) условия

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi(t,y)dt = g_1(y), \ -1 < y < 1, \\
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi(x,\tau)d\tau = g_2(x), \ -1 < x < 1, \\
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g_1(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g_2(t)dt = A.
\end{gathered} \tag{7.6.2}$$

Пусть

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2-25)(y^2-16)}, \qquad g_1(x) = 0, \qquad g_2(y) = 0, \qquad A = 0.$$

Тогда, согласно [8], решением задачи (7.6.1) – (7.6.2) будет функция

$$\varphi(x,y) = \frac{\left[\pi\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{6}\log\left(\frac{2}{3}\right)\right]\left[\pi\sqrt{1-y^2} + \sqrt{15}\log\left(\frac{3}{5}\right)\right]}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}(x^2-25)(y^2-16)}.$$

В табл. 15 приведены значения погрешностей между точным и приближенным значениями функций $\delta^i(x,y) = |\varphi(x,y) - \varphi_{n,m}(x,y)|$ для $n = m = 20$ в тех же точках, что и в [8]. Индекс $i = 1,2,3,4$ для функций $\varphi_{n,m}(x,y)$, полученных соответственно по формулам (5.3.11), (5.3.12), (5.3.14), (5.3.15).

Таблица 15

x	y	$\delta^1(x,y)$	$\delta^2(x,y)$	$\delta^3(x,y)$	$\delta^4(x,y)$
0,9999	0,9999	0	5,2 e–19	0	0
0,8976	0,3504	0	5,8 e–18	0	0
0,4576	0,7234	0	3,7 e–18	0	0
0,0026	0,0211	0	0	0	0
–0,0015	0,9986	0	0	0	0
–0,5523	0,6686	0	2,4 e–18	0	0
–0,9853	–0,0006	0	0	0	0
–0,3247	–0,8954	0	5,0 e–18	0	0
–0,0247	–0,2354	0	8,7 e–18	0	0
0,4247	–0,7554	0	4,7 e–18	0	0
0,9487	–0,1554	0	0	0	0

Из таблицы видно, что наихудшая погрешность по предложенным здесь вычислительным схемам равна 8,7 e–18. В работе [8] она равна 2,8 e–16. Наилучшая погрешность здесь равняется нулю (в рамках точности вычислительного процесса), в работе [8] — 2,8 e–18.

7.7. Приближенное решение полного векторного сингулярного интегрального уравнения

Рассмотрим уравнение (6.1.4), в котором

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

при

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{5}{2}x\,\pi\,i\right),\\
a_{12} &= \frac{1}{2(x^2-1)}\left[1 - \exp\left(\frac{5}{2}x\,\pi\,i\right)\right[\exp\left[\frac{3}{4}\left(2 + x\,\ln\frac{1-x}{1+x} - x\,\pi\,i\right)\right],\\
a_{22} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{3}{2}x\,\pi\,i\right),
\end{aligned}$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

при

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\left(\frac{5}{2}x\,\pi\,i\right),\\
b_{12} &= -\frac{1}{2(x^2-1)}\left[1 - \exp\left(\frac{5}{2}x\,\pi\,i\right)\right]\exp\left[\frac{3}{4}\left(2 + x\,\ln\frac{1-x}{1+x} - x\,\pi\,i\right)\right],\\
b_{22} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{3}{2}x\,\pi\,i\right),
\end{aligned}$$

$$K^*(x,\,t) = \begin{pmatrix} \exp(x) & x\,t \\ \dfrac{1}{(x+2)(t+2)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \\ f_2(x) \end{pmatrix},$$

при

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{0,086834150217446}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \\
&\quad + 0,019399958769597x - 0,086834150217446\,e^x,\\
f_2(x) &= \frac{15,4951500103076}{x-4} + x + 52,0048499896924.
\end{aligned}$$

Нетрудно подсчитать, что $\varkappa_1 = 4$, $\varkappa_2 = -2$.

Добавим условия единственности (6.1.9) при $\alpha_1 = -0,086834150217$, $\alpha_2 = -0,173668300435$, $\alpha_3 = -0,34733660087$, $\alpha_4 = -0,69467320174$.

Тогда задача (6.1.4), (6.1.9) будет иметь решение

$$u(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x-2} \\ \dfrac{1}{x-4} \end{pmatrix}.$$

В табл. 16 функция $u_n(x)$ – решение задачи (6.4.1) – (6.4.3) (схема 6.4.1) в системе точек x от $-0,995$ с шагом $0,001$ до $0,995$.

Таблица 16

n	9	11	13	15
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert u(x) - u_n(x)\rvert$	6,6 e–8	1,3 e–9	1,2 e–10	8,3 e–12

Численный эксперимент показал, что такие же результаты имеют место и при решение задачи (6.4.8) – (6.4.10) (схема 6.4.2).

Библиографический список

1. *Bisplinghof, R. L.* Aeroelasticity / R. L. Bisplinghof, H. Ashley, R. L. Halfman. – Dover Publications, Mineola, 1996.
2. *Borja, M.* Uber die numerische Behandlung der Tragflachengleichung / M. Borja , H. Brakhage // Z. angew. Math. und Mech., 1967. V. 47. Sonderhelf. P. 102 – 103.
3. *Elliott, D.* The approximate solution of singular integral equations / D. Elliott // Solutions methods of integral equations. Theory and Appl. – New York; London, 1979. V. 18. P. 83 – 107.
4. *Golberg, M. A.* The numerical solution of Cauchy singular integral equations with constant coefficients / M. A. Golberg // J. Integr. Equat., 1985. V. 9. № 1. P. 127 – 151.
5. *Prossdorf, S.* Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations / S. Prossdorf, B. Silbermann. – Berlin, 1991.
6. *Smarzewski, R.* Orthogonal approximate solution of Cauchy-type singular integral equations / R. Smarzewski, M. A. Sheshko, G. A. Rasolko // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM), 2003. V. 3. № 2. P. 330 – 356.
7. *Tricomi, F. G.* On the finite Hilbert transformation / F. G. Tricomi // Quart. J. Math., 1951. V. 2, No. 2. P. 199 – 211.
8. *Wojcik, P.* Solution of a class of the first kind singular integral equation with multiplicative Cauchy kernel / P. Wojcik, M. A. Sheshko, D. Pylak, P. Karczmarek // Annales universitatis Marie Curie-Skladowska, Lublin – Polonia, 2012. V. 66. № 2. P. 93 – 105.
9. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кабельков. – М., 1987.
10. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции : в 2 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М., 1966. Т. 2
11. *Васильев, Н. И.* Применение полиномов Чебышева в численном анализе / Н. И. Васильев, Ю. А. Клоков, А. Я. Шкерстена. – Рига, 1984.
12. *Векуа, Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений / Н. П. Векуа. – М., 1970.
13. *Габдулхаев, Б. Г.* Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений / Б. Г. Габдулхаев // Итоги науки и техники. Серия математический анализ, 1980. Т. 18. С. 251 – 307.
14. *Габдулхаев, Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б. Г. Габдулхаев. – Казань : Изд-во Казанского ун-та. Анализ, 1980.

15. *Габдулхаев, Б. Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б. Г. Габдулхаев. – Казань, 1994.
16. *Гахов, Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций / Ф. Д. Гахов // Успехи мат. наук, 1952. Т. 7. № 4. С. 3 – 54.
17. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – Москва : Наука, 1977.
18. *Голубев, В. В.* Лекции по теории крыла / В. В. Голубев. – Москва; Ленинград : Гостехиздат, 1949.
19. *Джишкариани, А. В.* К решению сингулярных интегральных уравнений приближенными проекционными методами / А. В. Джишкариани // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1979. Т. 19. № 5. С. 1149 – 1162.
20. *Золоторевский, Ф. Д.* Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования / Ф. Д. Золоторевский. – Кишинев, 1991.
21. *Карпенко, Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби / Л. Н. Карпенко // Прикладная математика и механика, 1966. Вып. 3. С. 564 – 569.
22. *Ланс, Дж. Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин / Дж. Н. Ланс. – М. : Изд. ин. лит., 1962.
23. *Лифанов, И. К.* О формулах обращения многомерных сингулярных интегралов / И. К. Лифанов // Докл. АН СССР, 1979. Т. 249. № 6. С. 1306 – 1309.
24. *Лифанов, И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – М., 1995.
25. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966.
26. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1968.
27. *Панасюк, В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1968.
28. *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев : Наукова думка, 1976.
29. *Панасюк, В. В.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, З. Т. Назарчук. – Киев : Наукова думка, 1984.
30. *Пашковский, С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – М. : Наука, 1983.
31. *Полянин, А. Д.* Справочник по интегральным уравнениям / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. – М. : Физматлит, 2003.
32. *Попов, Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М., 1982.
33. *Расолько, Г. А.* Прямой метод решения интегральных уравнений первого рода с мультипликативными ядрами Коши / Г. А. Расолько // Дифференц. уравнения, 1987. 14 с. Деп. в ВИНИТИ 12.03.87, № 1808-В87.

34. *Расолько, Г. А.* Интегральные уравнения первого рода, содержащие интегралы с кратными ядрами Коши / Г. А. Расолько // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1988, № 5. С. 22 – 27.

35. *Расолько, Г. А.* Прямые методы решения некоторых сингулярных интегральных уравнений / Г. А. Расолько // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1990.

36. *Расолько, Г. А.* О решении одного уравнения, содержащего кратные интегралы с ядрами Коши / Г. А. Расолько, М. А. Шешко // Дифференц. уравнения, 1991. Т. 27. № 6. С. 1092 – 1097.

37. *Расолько, Г. А.* Прямой метод приближенного решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши при помощи многочленов Чебышева / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2003. № 2. С. 52 – 58.

38. *Расолько, Г. А.* Применение многочленов Чебышева в прямом методе решения векторного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши / Г. А. Расолько // Доклады НАН Беларуси, 2003. Т. 47. № 5. С. 19 – 24.

39. *Расолько, Г. А.* Численное решение характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши с использованием многочленов Чебышева второго рода / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2007. № 1. С. 26 – 34.

40. *Расолько, Г. А.* Разложение по многочленам Чебышева второго рода сингулярного интеграла с логарифмической особенностью и ядром Коши / Г. А. Расолько, Л. А. Альсевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2009. № 2. С. 46 – 51.

41. *Расолько, Г. А.* Применение многочленов Чебышева при численном решении сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью в классе ограниченных функций / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2009. № 3. С. 24 – 30.

42. *Расолько, Г. А.* Разложение сингулярного интеграла с логарифмической особенностью и ядром Коши по многочленам Чебышева / Г. А. Расолько, Л. А. Альсевич // Доклады НАН Беларуси, 2009. Т. 53. № 5. С. 10 – 14.

43. *Расолько, Г. А.* К разложению одного сингулярного интеграла с логарифмической особенностью и ядром Коши по многочленам Чебышева / Г. А. Расолько, Л. А. Альсевич // Труды Института Математики НАН Беларуси. Материалы 5-й международной конференции "AMADE", 2010. Т. 1. С. 105 – 109.

44. *Расолько, Г. А.* Решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2011. № 1. С. 25 – 31.

45. *Расолько, Г. А.* Метод приближенного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2012. № 1. С. 22 – 26.

46. *Расолько, Г. А.* Квазиспектральные соотношения для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью на концах отрезка / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2012. № 3. С. 27 – 31.
47. *Расолько, Г. А.* Приближенное решение интегрального уравнения первого рода с двукратным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика, 2014. № 1. С. 100 – 104.
48. *Расолько, Г. А.* Приближенное решение интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2014. № 1. С. 27 – 31.
49. *Расолько, Г. А.* Численное решение интегрального уравнения первого рода с двукратным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика, 2014. № 2. С. 103 – 107.
50. *Расолько, Г. А.* К решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2014. № 2. С. 27 – 31.
51. *Расолько, Г. А.* К приближенному решению интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2014. № 3. С. 9 – 14.
52. *Расолько, Г. А.* Приближенное решение одного интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Труды ИМ НАН Беларуси, 2014. Т. 22. № 2. С. 74 – 83.
53. *Саврук, М. П.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – Киев : Наукова думка, 1989.
54. *Сегё, Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – М. : Физматгиз, 1962.
55. *Шешко, М. А.* О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла / М. А. Шешко // Изв. вузов. Математика, 1976. № 12. С. 108 – 118.
56. *Шешко, М. А.* О сходимости квадратурного процесса для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью / М. А. Шешко, Т. С. Якименко // Изв. вузов. Математика, 1979. № 6. С. 82 – 84.
57. *Шешко, М. А.* Обращение многомерного интеграла типа Коши / М. А. Шешко // Доклады АН БССР, 1980. Т. 24. № 10. С. 888 – 891.
58. *Шешко, М. А.* О точных и приближенных формулах обращения кратного интеграла с ядрами Коши / М. А. Шешко, Г. А. Расолько // Дифференц. уравнения, 1989. Т. 25. № 5. С. 911 – 915.
59. *Шешко, М. А.* Прямой метод решения системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши / М. А. Шешко // Дифференц. уравнения, 1997. Т. 33. № 9. С. 1278 – 1287.

60. *Шешко, М. А.* О точном и приближенном решениях системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта / М. А. Шешко, Д. С. Шуляев // Дифференц. уравнения, 1998. Т. 34. № 9. С. 1231 – 1239.
61. *Шешко, М. А.* Разложение сингулярного характеристического интегрального оператора с ядром Коши по многочленам Чебышева / М. А. Шешко, Г. А. Расолько // Доклады НАН Беларуси, 2001. Т. 45. № 5. С. 41 – 44.
62. *Шешко, М. А.* Применение многочленов Чебышева при приближенном решении сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши / М. А. Шешко, Г. А. Расолько // Труды ИМ НАН Беларуси, 2001. Т. 9. С. 112 – 118.
63. *Шешко, М. А.* Разложение векторного сингулярного характеристического интегрального оператора с ядром Коши по многочленам Чебышева / М. А. Шешко, Г. А. Расолько // Доклады НАН Беларуси, 2002. Т. 46. № 4. С. 48 – 51.
64. *Шешко, М. А.* Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение / М. А. Шешко. – Люблин, 2003.

Научное издание

Расолько Галина Алексеевна

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРАМИ КОШИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Ответственный за выпуск *Е. А. Логвинович*

Дизайн обложки *О. В. Гасюк*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Компьютерная верстка *Г. А. Расолько*
Корректор *Е. В. Гордейко*

Электронный ресурс 1,9 Мб.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

РАСОЛЬКО Галина Алексеевна

Закончила Белорусский государственный университет по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Область научных интересов: разработка теории и приложений численных методов для решения специализированных классов интегральных уравнений, приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и Гильберта, методика использования информационных технологий в курсах вузовской математики.